Números Naturales

Sucesiones

Inducción

Sumatorias simples y dobles

Progresión Aritmética

Progresión Geométrica

Teorema del binomio de Newton

Sucesiones

Definición: una sucesión es una función definida de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que se acostumbra a denotar por a_n en lugar de f(n).

Así $a_n \in \mathrm{IR}$, $\forall n \in \mathrm{IN}$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots., a_{n-1}, a_n, \ldots$$

a_1: primer término de la sucesión

a_k: k-ésimo término de la sucesión

a_n: término n-ésimo

Ejercicios:

1. Dadas las siguientes sucesiones escriba los 5 primeros términos.

$a.\quad a_n = \dfrac{2n-1}{n^2+1}$

$b.\quad a_n = 2n-1$

$c.\quad a_n = (-1)^n$

$d.\quad a_n = 1+2+3+4+\ldots\ldots..+n$

$e.\quad a_n = \dfrac{1}{n}$

$f.\quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

2. Dada la sucesión

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{3n+1}$$

determine el k-ésimo término, el sucesor y el antecesor.

Ejercicio

3. Dada la sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

a. Determine su término n-ésimo.

b. Pruebe que $a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$

c. Calcule $a_1 - a_{n+1}$

Principio de Inducción

Sea una proposición de la forma $\forall n \in IN : p(n)$

probaremos la verdad de esta proposición estableciendo lo siguiente:

1. Se verifica que p(1) es verdad.
2. Hipótesis: suponemos verdadera p(k).
3. Tésis: debemos demostrar, usando la hipótesis que p(k+1) es verdadera.

Conclusión si p(k+1) es verdadera quiere decir que $\forall n \in IN : p(n),$

es verdadera.

Ejercicios:

1. Demostrar $\forall n \in IN$ que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

2. Demostrar que $\forall n \in IN$

$p(n)=10^{n}+3\cdot 4^{n+2}+5$ es divisible por 9.

3. Demuestre que $\forall n \in IN, 8^{n-1}+6$ es divisible por 7.

4. Demuestre por inducción que

$$\forall n \in IN, \quad 2+4+...+2n=n(n+1)$$

5. Demuestre que

$$\forall n \in IN \in IN, 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Sumatoria

Definición:

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son ***"n"*** términos de una sucesión de números reales, entonces la suma de todos ellos se representa por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n$$

y es llamada "sumatoria de 1 hasta ***n*** de los a_i"

Ejemplos:

Desarrollando la sumatoria, calcule:

1. $\sum_{i=1}^{6} 2i$

2. $\sum_{i=2}^{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{i}$

3. $\sum_{i=1}^{3} \left(3i - i^{2}\right)$

4. $\sum_{i=5}^{8} 2(i+3)$

$$5.\ Si\ \ x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 9, x_4 = -9, x_5 = 0, x_6 = -5$$

Calcule el valor numérico de:

$$a.\quad \sum_{i=1}^{3}\left(x_i - 2\right) \qquad\qquad b.\quad \sum_{i=3}^{6}\frac{x_i + 2}{(x_i - 5)^2}$$

Propiedades de Sumatorias

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c \ , \ c \in IR \ y \ es \ cte$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \pm b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad c \quad \text{constante}$$

$$4.\ \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{p-1} a_i, \qquad donde \ \ p \leq n$$

Sumas Notables

Las sumas notables, se usan para calcular las sumatorias de la forma:

$$1. \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Ejercicios: Calcule

1. $\sum_{i=1}^{55}\left(2i+9\right)=$

2. $\sum_{k=1}^{51}\left(7k-6\right)^2=$

3. $\sum_{i=1}^{20}\frac{\left(2i^3-i\right)}{3}=$

4. $Hallar\ n\in IN:\ tal\ \ que\ \sum_{x=1}^{n}\left(2x\right)=342$

5. $$\sum_{k=1}^{25}\left(3k^3 - k^2 + 5\right) =$$

6. $$\sum_{i=15}^{45}(2i-3)(2i+3) =$$

7. $$\sum_{i=10}^{150} a_i, \quad si \quad a_n = \begin{cases} n^2 & 1 \le n \le 40 \\ n^3 & 40 < n \le 100 \\ 5 & n > 100 \end{cases}$$

Propiedad telescópica

El desarrollo de algunas sumatorias tiene la particularidad de que cuando se desarrollan casi todos sus términos se anulan, quedando éstas reducidas a sólo dos términos (el primero y el último). Esta propiedad se denomina Propiedad telescópica de las sumatorias.

Observemos el siguiente caso:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\ldots+(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n)$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$$

Con el mismo razonamiento se deduce que:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

La Propiedad Telescópica también es válida para la suma de los recíprocos:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}$$

Ejemplos: Calcule usando la propiedad telescópica

1. $$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{i+2}-\frac{1}{i+1}\right)$$

2. $$\sum_{i=9}^{80}\left(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\right)$$

3. $$\sum_{k=1}^{13}\left(\frac{5}{k+1}-\frac{5}{k}\right)=$$

4. $$\sum_{k=5}^{20}\left(\frac{1}{k-3}-\frac{1}{k-4}\right)=$$

Ejercicios propuestos.

5. $$\sum_{k=5}^{10}\left[(k+1)^3-k^3\right]=$$

6. $$\sum_{n=2}^{13}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-2}\right)=$$

7. $$\sum_{j=14}^{40}\left(\frac{3}{2j+1}-\frac{3}{2j-1}\right)=$$

8. $$\sum_{j=1}^{8}\left(3^{j+1}-3^{j}\right)=$$

Fracciones parciales

Las fracciones parciales se utilizan para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples. En este curso revisaremos la descomposición en fracciones parciales en la cual cada denominador es lineal.

Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

Primero debemos descomponer la fracción en:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

Ejercicios: Calcule descomponiendo en fracciones parciales.

1. $$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} =$$

2. $$\sum_{k=20}^{70} \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

Sumatorias dobles

Sea a_{ij} una sucesión tal que i, j ∈ IN, así se definen:

1. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij};\ n, m \in IN$$

Note que para $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$, la sumatoria entre paréntesis suma sobre j manteniendo i constante, análogamente para $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$, la suma entre paréntesis suma sobre i, y j se considera constante.

$$Ej: \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{15}(3i+4j) = \sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{15} 3i+4j\right) = \sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{15} 3i + 4\sum_{j=1}^{15} j\right) = \sum_{i=1}^{10}\left(45i + 4\cdot\frac{15\cdot 16}{2}\right)$$

2. Si es el caso que $a_{ij}=b_i c_j$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j = \right)$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{25}\sum_{j=1}^{30} 7i^2 j = \left(\sum_{i=1}^{25} 7i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{30} j\right)$$

3. Ahora si se trata de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$ entonces, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right)$

Y en este caso la sumatoria indicada entre paréntesis es la que se debe efectuar necesariamente en primera instancia.

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{25}\sum_{j=1}^{i} 7ij = \sum_{i=1}^{25}\left(\sum_{j=1}^{i} 7ij\right) = \sum_{i=1}^{25}\left(7i\sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{25}\left(7i\cdot\frac{i(i+1)}{2}\right) = \frac{7}{2}\sum_{i=1}^{25}\left(i^3+i^2\right) =$$

Obs: Para el cálculo o desarrollo de una sumatoria doble se usan las propiedades y las sumas notables de las sumatorias simples.

Ejercicios: Calcule

1. $$\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{j}+k\right)=$$

2. $$\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{i}\left(2ji\right)=$$

3. $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(2^{i+j}\right)=$$

Ejercicios propuestos

1. $$\sum_{k=1}^{250}(3k-2)(4k+7)$$

2. $$\sum_{i=21}^{90}[(2i-6)(2i+6)]$$

3. $$\sum_{k=1}^{77}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

4. $$\sum_{j=2}^{n+2}(j-1)^4-\sum_{k=1}^{n}k^4 \qquad ,recomendación\ \ k=j-1$$

Ejercicios: Calcule

5. $$\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{40}(i+2j)^3 =$$

6. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(4ij)=$$

7. $$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{30}(2j-3i)^2 =$$

8. $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(2^{i+j}\right)=$$

Progresión Aritmética.

Definición:

Se dice que una sucesión de números reales

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Está en progresión aritmética si $a \in IR \text{ y } d \in IR \text{ tales que :}$

$$a_1 = a \qquad\qquad a_n - a_{n-1} = d$$

donde el término general es: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_1 : \text{Primer término} \qquad\qquad d : \text{Diferencia}$$

Y la suma de los n primeros términos se puede calcular:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas:

a. 3, 7, 11, 15… $\qquad$ b. $\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ldots$

2. Encuentre el noveno término y la suma de los 20 primeros términos en las PA:

$a.\ 4,7,10,\ldots \qquad b.\ \frac{1}{6},\frac{1}{2},\ldots \qquad c.\ 2,-\frac{1}{2},\ldots$

3. Si el séptimo término de una progresión aritmética es 2700 y el vigésimo término es 2050. Determine el primer término, la diferencia y la suma de los cuarenta primeros términos.

4. La suma de los primeros 15 términos de una P. A. Es 615 y la diferencia es 6. Encuentre los tres primeros términos de esta progresión.

5. Calcule la suma de todos los múltiplos de 7 que hay entre 100 y 400

Progresión Geométrica.

Definición:

Se dice que una sucesión de números reales

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Están en progresión geométrica si $a \in IR \text{ y } r \neq 0 \text{ tales que:}$

$$a_1 = a \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

donde el término general es: $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$a_1 : \text{Primer término} \qquad \text{r : razón}$$

Y la suma de los n primeros términos se puede calcular:

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

Ejercicios

1. Para las sucesiones siguientes, determine cual de ellas están en progresión geométrica y determine además el primer término, la razón y el duodécimo término:

a. $2\,,4\,,6\,,8\,,....$

b. $1,2\,,4\,,8\,,....$

c. $5\,,10\,,15\,,20\,,....$

d. $5\,,25,125,625\,,....$

Ejercicios

2. La suma de tres términos en Progresión Geométrica es 38 y su producto es 1728. Determine los términos de la progresión.

3. Determine el valor de X para que los términos X , 2X+7 , 10X - 7 ; estén en P.G. Determine la razón.

R: x=7 y -7/6

r=3 r=-4

FACTORIALES

Definición:

Sea $n \in IN \bigcup \{0\}$ vamos a definir inductivamente n! (se lee n factorial) mediante:

1. $0! = 1$
2. $(n+1)! = n!(n+1)$

Ejemplos: calcule

a. 3!

b. 10!

c. (n+3)!

Coeficientes binomiales

Definición

Sean $n \in IN, k \in IN \bigcup \{0\}$ Se define $\binom{n}{k}$ (se lee "n sobre k") mediante:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} & si \quad k \leq n \\ 0 & si \quad k > n \end{cases}$$

Ejemplos: Calcule

a. $\binom{10}{7}$ b. $\binom{4}{1}$ c. $\binom{6}{8}$ d. $\binom{5}{0}$ $e.\binom{k}{3}$

Propiedades

1. $\binom{n}{0} = 1$ $\quad\quad$ $\binom{n}{n} = 1$

2. $\binom{n}{1} = n$ $\quad\quad$ $\binom{n}{n-1} = n$

3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ $\quad\quad$ demuestre

Ejercicios

1. Usando la definición de coeficiente binomial resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $$\binom{n}{2} = 190$$

b. $$\binom{n}{10} + \binom{n}{11} = \binom{n+1}{21-x}$$

2. Usando propiedades reduzca y deje expresado:

a. $$\binom{15}{2}+\binom{15}{3}=$$

b. $$\binom{100}{42}+\binom{100}{41}=$$

c. $$\frac{\binom{n}{6}+\binom{n}{5}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}=$$

Triángulo de Pascal

Observemos que la propiedad antes demostrada, se cumplen en el triángulo de Pascal (coeficientes binomiales).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Teorema del Binomio

Sea $n \in IN, y \quad a,b$ reales. Entonces el desarrollo es:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

o

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

si es resta.

Por lo que,

El término en el lugar k+1 es: $t_k = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

El término central si n es par está en : $k = \dfrac{n}{2}$

Los términos centrales si n es impar están en : $k_1 = \dfrac{n-1}{2} \quad y \quad k_2 = \dfrac{n+1}{2}$

Ejemplos:

1. Determine el término central en e desarrollo de $(p + q)^8$.

Como n=8 es par existe un término central cuando $k = \dfrac{8}{2} = 4$

El término central es el quinto término:

$$t_4 = \binom{8}{4} p^4 \cdot q^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} p^4 \cdot q^4 = 70\, p^4 \cdot q^4$$

El término central es $70\, p^4 \cdot q^4$

2. Determine el término central en e desarrollo de (a - b)^7.

Como n=7 es impar y existen dos términos centrales cuando $k = \frac{6}{2} = 3$

$k = \frac{8}{2} = 4$

Los términos centrales son:

El cuarto término

$$t_3 = (-1)^3 \binom{7}{3} a^4 \cdot b^3 = -\frac{7!}{4! \cdot 3!} a^4 \cdot b^3 = -35a^4 \cdot b^3$$

el quinto término:

$$t_4 = (-1)^4 \binom{7}{4} a^3 \cdot b^4 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} a^3 \cdot b^4 = 35a^3 \cdot b^4$$

3. En el desarrollo del binomio

$$\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^{20}$$

Determinar si es que existen:

a. El quinto término

b. El término independiente de x

c. El término central

4. En el desarrollo

$$\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9.$$

Hallar:

a. El tercer término.
b. El término que contiene a x^5.
c. El término independiente de x.
d. El (o los) término central.