Universidad Finis Terrae
Escuela de ingeniería Comercial
Asignatura: Álgebra
Segundo Semestre 2015

Guía 9 : Matrices.

1. Si se tienen las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   - Calcule A^2, AB BA, CA^2, $B(A+B)$, $2A + \frac{1}{2}B$, $A^{-1}B^{-1}$, $(AB)^{-1}$.
   - Resuelva las ecuaciones:

     a) $2X - A = BC$
     b) $X + A^2 = CB$
     c) $\frac{1}{2}X + B = X - A$
     d) $AX = B$
     e) $BXC = A$
     f) $AX - B = C - X$
     g) $AX = BC$
     h) $AX + XB = C$
     i) $BX - I_2X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

2. Encuentre los valores de x e y para que las matrices A y B sean iguales:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1+x & 2+3y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} y-4 & 2x+5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & x+3y \\ 3 & 5x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2x+y \\ 3 & \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$.

   c) $A = \begin{pmatrix} x+y & 2x-2y \\ 3x-y & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} y+2x & x+5y \\ 3x+6y & 4 \end{pmatrix}$.

   d) $A = \begin{pmatrix} 1+x & 2+3y \\ x+3y+3 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} y-4 & 2x+5 \\ 2x+y+1 & x-y \end{pmatrix}$.

3. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular $A+B$, $-2B$, $A-B$, $A-2B$.

4. En cada uno de los siguientes casos determinar $(AB)C$ y $A(BC)$.

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1+x & 2+3y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, determine los valores x e y para que:

   a) $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 7$ y $a_{11} = 2a_{12}$.

   b) A tenga inversa y $x = -2$.

   c) $2A - I_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 2+3y \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

6. Si $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$, se define la traza como $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Calcule el valor de $Tr(A)$ si:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & 3 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

   d) $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ con $a_{ij} = 2i + 3j$

   e) $A = (a_{ij})_{n\times n}$ con $a_{ij} = ij + i + 2$

7. Sea $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, con $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, si } i > j \\ x_i & \text{, si } i \leq j \end{cases}$ encuentre todos los elementos de la matriz A si $Tr(A) = 12$; $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 22$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{1j} = 9$.

8. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$.

9. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre una fórmula para A^n y demuéstrela por inducción.

10. Sean A y B dos matrices invertibles tal que:

$$(A + B)^2 + (A + B)(A - B) - I_n = 2A^2 + B.$$

   a) Encuentre la matriz A si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, para $n = 2$.

   b) Demuestre que: $B^{-1} = 2A - I_n$.

11. Si se tienen las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   - Calcule $B^{-1}A^{-1}$, $(AB)^{-1}$, $(A + C)^{-2}$, $A^{-1} + B^{-1} + C^{-1}$.
   - Resuelva las ecuaciones:

     a) $2X - A = BC$

     b) $X^t + A = A^t$

12. Si se tienen las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- Calcule $2A + B\,B^2 - 3C$, $(A - B + C)^2$, $AB - BA$, A^2B^2, $(AB)^{-1}$ y $2(A - C)(A + C)$.
- Resuelva las ecuaciones:
  a) $\frac{1}{2}(AB + X) = BC$ *b*) $XB = A^t$

13. Uma matriz se dice idempotente si y sólo si $A^2 = A$.

   a) Demuestre que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

   es idempotente.

   b) Demuestre que si A es idempotente, $B = I_n - A$ es idempotente y $AB = BA = 0$.

14. Pruebe que no existe una matriz B tal que $AB = BA = I_2$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

15. Determinar todas las matrices A de orden 2×2 con coeficientes reales, tales que cumplan $A^2 = 0$.

16. Determinar todas las matrices A de orden 2×2 con coeficientes reales, tales que cumplan $A^2 = I$.

17. Se dice que una matriz A es involutiva si y sólo si $A^2 = I_n$.

   a) Demuestre que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ es involutivas.

   b) Demuestre que si A es una matriz involutiva entonces $\frac{1}{2}(I_n + A)$ y $\frac{1}{2}(I_n - A)$ son idempotentes y $\frac{1}{2}(I_n + A)\frac{1}{2}(I_n - A) = 0$.

18. Encuentre el valor de x en la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ x & -2 \end{pmatrix}$ de modo que esta matriz sea:

   a) Idempotente.

   b) Involutiva.

19. Encuentre el valor de x e y en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ x & y \end{pmatrix}$ de modo que esta matriz sea:

   a) Involutiva.

   b) Invertible.

20. Resuelva la ecuación: $AXB = C$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 24 \end{pmatrix}$.

21. Encuentre la matriz X en la ecuación: $AXB = C$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 25 & 42 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

22. Si se tienen las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema matricial:

$$\begin{aligned} 2A^tX + Y &= B^t \\ X^t - Y^tB^{-1} &= 0_{2\times 2} \end{aligned}$$

23. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, deduzca una fórmula para A^n y demuéstrela.

24. Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, satisface la ecuación

$$x^3 - 10x^2 + 7x + 19 = 0$$

y con esto encuentre A^{-1}.

25. Verifique que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, satisface la ecuación

$$(x+2)^2(x-4) = 0$$

y con esto encuentre A^{-1}.

26. Si A es una matriz nilpotente de índice 2, demuestre que $A(I + A)^n = A$, con $n \in \mathbb{N}$.

27. Sea B una matriz de orden $n \times 1$, tal que $b_{ij} = 1$, para todo i, j. Demuestre que la matriz $A = I_n - \frac{1}{n}B\,B^t$ es simétrica e idempotente.

28. Demuestre que si A y B son matrices simétricas entonces

    a) $A + B$ es simétrica.

    b) A^n es simétrica.

    c) $A^{-1}B$ es simétrica. (En este caso suponga A regular y $AB = BA$.)

29. *a*) Si A es una matriz nilpotente de índice 3, determine una fórmula para $(I_n - A)^{-1}$ y para $(A + I_n)^{-1}$.

b) Use lo anterior para encontrar $(I_n - A)^{-1}$ y para $(A + I_n)^{-1}$ si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

30. Sea $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ tal que $a_{ij} = 1$, para todo i, j. Determine el valor de k de modo que $(I_4 - A)^{-1} = I_4 + kA$.

31. Sean A y B dos matrices de orden $n \times n$ y supongamos que existe una matriz P regular tal que $B = P^{-1}\,A\,P$.

a) Demuestre que: $B^n = P^{-1}\,A^n\,P$, con $n \in \mathbb{N}$.

b) Sea el polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Demuestre que B es raiz del polinomio si y solo si A es raiz del polinomio.

32. Para cada número real k se define la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -k & 1 & -\frac{1}{2}k^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que $A_p A_q = A_{p+q}$.

33. Sea $A = aI_n + b\,B$, donde a, b son escalares y $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, si } i = j \\ 1 & \text{, si } i \neq j \end{cases}$

Determine a y b de modo que la matriz A sea involutiva.

34. Determine todas las matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

35. Sea $w^3 = 1$, con $w \neq 1$, demuestre que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \end{pmatrix} = 3I_3.$$

36. Si A es una matriz cualquiera, demuestre que AA^t es una matriz simétrica. Verifique este hecho para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

37. Encuentre una matriz B tal que $AB = A^2$ si se sabe que: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

38. Resuelva la ecuación: $AX - A = (BX^t)^t + C$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

39. Sea

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar todas las potencias $N^k = 0$, con k entero positivo.

40. Sea $a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{si } j = i+1 \\ 0 & , \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$

Demuestre que $A^n = 0$ y $A^{n-1} \neq 0$.

41. Demuestre que toda matriz cuadrada de orden $n \times n$ es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

42. Si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar la parte simétrica y antisimétrica de A.

43. Determine si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones.

a) ______ El producto de matrices triangulares es triangular.

b) ______ El producto de matrices triangulares del mismo orden es triangular del mismo orden.

c) ______ Cada matriz antisimétrica tiene la diagonal principal igual a cero.

d) ______ Para toda matriz A en M_n. Si $A^4 = 0$ entonces $A = 0$.

e) ______ El producto de matrices simétricas del mismo orden es simétrica.

f) ______ Para toda matriz A en M_n se tiene $A^tA = AA^t$.

g) ______ Para toda matriz A en M_n se tiene $(A + A^t)$ es simétrica.

h) ______ Para toda matriz A en M_n con $A \neq 0$ entonces existe B tal que $AB = I$.

i) ______ Si A y B son matrices de orden n y $AB = O$ entonces $A = 0$ ó $B = 0$.