UNIVERSIDAD FINIS TERRAE
ESCUELA DE INGENIERÍA COMERCIAL
ASIGNATURA: ÁLGEBRA
SEGUNDO SEMESTRE 2015

RESPUESTAS GUÍA 1
LÓGICA

1. a) 4 es un número primo y cuatro es divisor de 32.
   b) 4 es divisor de 32, entonces 4 no es un número de primo.
   c) 4 no es un número primo si y solo si 4 es divisor de 32.
   d) 4 no es un número primo o 4 es divisor de 32.
   e) 4 no es un número primo entonces 4 no es divisor de 32.
   f) 4 es divisor de 32 y 4 no es un número primo o 4 no es divisor de 32.

3. a) $(\neg p \wedge \neg q) \wedge r$
   b) $\neg p \wedge q$
   c) $(p \vee r) \Rightarrow q$
   d) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   e) $(\neg p \wedge q) \Rightarrow r$
   f) $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$

5. a) contingencia
   b) tautología
   c) tautología
   d) contingencia
   e) contingencia
   f) contingencia
   g) contradicción

7. $[(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)] \vee q \equiv$ T.

$[[(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)] \wedge [(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]] \vee q$

$[\neg[(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)] \wedge [\neg(\neg p \wedge q) \vee (p \vee q)]] \vee q$

$[[(\neg p \wedge \neg q) v (\neg p \wedge q)] \wedge [(p v \neg q) v (p v q)]] v q$

$[[\neg p \wedge (\neg q v q)] \wedge [(p v p) v (\neg q v q)]] v q$

$[(\neg p \wedge V) \wedge [p v V]] v q$

$[\neg p \wedge V] v q$

$\neg p v q \equiv T$ Entonces la proposición es T .

9. a) p=v, q=F y r=V
   b) p=V, q=V y r=F
   c) p= V, q=V y r=F
   d) p=F, q=V y r=F
   e) p=V, q= VoF da el mismo resultado y r=V

11. p=V, q=V y r=F por lo tanto el esquema queda: V $\Rightarrow$ F, por lo tanto falso

13. a) falso
    b) verdadero
    c) verdadero
    d) falso

15. a) verdadera
    b) verdadera
    c) falsa
    d) verdadera
    e) verdadera
    f) falsa , 25+16>25

RESPUESTAS GUÍA 2
CONJUNTOS

1. a. $\{1,2,3,4,5,6,8\}$
   b. ϕ
   c. $\{0,1,6,7,8,9\}$
   d. $\{1,3,5,7,9\}$
   e. $\{0,1,6,7,8,9\}$
   f. $\{2,4\}$

3. ϕ

5. a. F
   b. F
   c. V
   d. F
   e. V
   f. V
   g. F

9. a. F Si $X=\{0,1,2,6\}$, $A=\{0,1,6,7,8,9\}$ y $B=\{0,1,6,7\}$ entonces
   $A\cap X = X\cap B=\{0,1,6\}$ $\quad y \quad$ $A\neq B$
   b. V Si $X=\{0,1,2\}$, $A=\{0,1\}$ y $B=\{0,1\}$ entonces
   $A\cap X = X\cap B=\{0,1\}$ $\quad y \quad$ $A=B$
   c. F $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ propiedad distributiva
   d. V $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cup\phi=A$

15. 36 estudiantes

17. a. 99
    b. 0
    c. 46
    d. 10
    e. 14

19. a. 50
    b. 100

21. a. 11
    b. 19

23. a. 344
    b. 418
    c. 212
    d. 546

25. $\#(A\cup B)=\#A+\#(B-A)$
    $310\neq 270+205=475$

27. a. 18
    b. 3
    c. 12
    d. 170
    e. 182

29. a. 18
    b. 8

31. a. 500
    b. 120
    c. 30
    d. 1120

33. a. 169
    b. 10

c.	110	f.	78
d.	75	g.	60
e.	122	h.	13

RESPUESTAS GUÍA 3
INDUCCIÓN

1. $8^{n-1}+6 \ \textit{divisible por} \ 7$

$\textit{para} n=1$

$8^{1-1}+6 \rightarrow 8^{0}+6 \rightarrow 7 y \ 7 \quad es \quad divisible \ por \ 7$

$n=k \quad suponemos \ 8^{k-1}+6=7p$

$n=k+1, por \ demostrar \ 8^{k}+6 \ divisible \ por \ 7$

$8^{k-1}\cdot 8+6=7\cdot 8^{k-1}+[\text{plantilla desconocida}]$

haciendo factor común en el miembro derecho lo que nos queda

$8^{k-1}\cdot 8+6=7\left(8^{k-1}+p\right)$

por lo tanto se cumple $\forall n \in IN$

3. Demuestre que $\forall$ n $\in$N, 1 · 3 + 2 · 4 + 3 · 5 + . . . + n · (n + 2) = n(n + 1)(2n + 7)/6.

para n = 1

$$1\cdot 3=\frac{(1\cdot 2\cdot 9)}{6}$$

3 = 3

por lo tanto se cumple.

H.I. para n = k

$$1\cdot 2+2\cdot 4+\ldots+k(k+2)=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6} \text{ se cumple.}$$

p.d. para n = k + 1 se cumple

$$1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+k(k+2)+(k+1)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

porH.I.

$$1\cdot 2+2\cdot 4+\ldots+k(k+2)=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}/+(k+1)(k+3)$$

$$1\cdot 2+2\cdot 4+\ldots+k(k+2)+(k+1)(k+3)=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3)$$

realizando la operación correspondiente en el lado derecho nos queda

$$1\cdot 2+2\cdot 4+\ldots+k(k+2)+(k+1)(k+3)=\frac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)(k+3)}{6}$$

realizando factor común en el lado derecho nos queda :

$$\frac{(k+1)(k(2k+7)+6(k+3))}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k-9)}{6}$$

$\therefore$ se cumple $\forall$ n $\in$ *IN*

5. Demuestre por inducción que $\forall$ n $\in$N se cumple:

a) para $n=1$

$$1^2=\frac{1(2)(3)}{6}1=1 \text{ se cumple}$$

para n = k

$$\text{suponemos } 1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

p.d. para $n=k+1$ se cumple

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

por H.I.

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}/+(k+1)^2$$

desarrollando el lado derecho

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

por lo tanto queda demostrado

c) $$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{para } n=1 ® 1=1\cdot\frac{1\cdot 2}{2} ® 1=1$$

suponemos que para n se cumple.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

p.D. se cumple para $n+1$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n}(n+1)^2=(-1)^{n}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

por H.I.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}/+(-1)^{n}(n+1)^2$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2$$

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)+2(-1)^n(n+1)^2}{2}$$

hacemos factor común

$$\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)+2(-1)^n(n+1)^2}{2}=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)\left[n(-1)^{-1}+2(n+1)\right]}{2}$$

$$\frac{(-1)^{n-1}(n+1)\left[n(-1)^{-1}+2(n+1)\right]}{2}=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)[-n+2n+2]}{2}$$

$$\frac{(-1)^{n-1}(n+1)[-n+2n+2]}{2}=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore secumple\,\forall n\in N$$

g)

$F(n)=7^{2n}+16n-1$ es divisible por 64

para $n=1\rightarrow 49+16-1=64 \quad \therefore$ se cumple

suponemos para $n=k\rightarrow 7^{2k}+16k-1=64p$

H.I. para $n=k+1\rightarrow 7^{2k+2}+16k+16-1$

$$7^{2k}\cdot 49+16k+16-1=48\cdot 7^{2k}+\underbrace{7^{2k}+16k-1}_{64p}+16=16\left(3\cdot 7^{2k}+1\right)$$

por demostrar $\left(3\cdot 7^{2k}+1\right)$ divisible por 4, para n=1 se cumple

para $n=k\rightarrow\left(3\cdot 7^{2k}+1\right)=4q$

$$\text{para } n=k+1\rightarrow\left(3\cdot 7^{2k+2}+1\right)=\left(3\cdot 7^{2k}\cdot 49+1\right)=3\cdot 7^{2k}+3\cdot 7^{2k}\cdot 48+1=\underbrace{\left(3\cdot 7^{2k}+1\right)}_{4q}+144\cdot 7^{2k}=4\left(q+36\cdot 7^{2k}\right)$$

$\therefore$ queda demostrado

h)

$$F(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

para $n=1\,\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$

suponemos para $n=k$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

por demostrar para n = k + 1

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

por H.I. $\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}/+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

desarrollando el lado derecho de la igualdad

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)\cdot(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

$\therefore$ queda demostrado

i)

$$F(n)=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

para $n=1$ *secumple*

suponemos para $n=k\rightarrow 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

por demostrar para $n=k+1$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

porH.I.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\quad /+(k+1)(k+2)$$

desarrollando el lado derecho tenemos :

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

por lo tanto queda demostrado.

j)

$$1\cdot 2+3\cdot 4+\ldots+(2n-1)\cdot 2n=\frac{n(n-1)(4n-1)}{3}$$

para n = 1 se cumple

suponemos para n = k se cumple

$$1\cdot 2+3\cdot 4+\ldots+(2k-1)\cdot 2k=\frac{k(k-1)(4k-1)}{3}$$

suponemos para n = k + 1

$$1\cdot 2+3\cdot 4+\ldots+(2k+1)\cdot(2k+2)=\frac{(k+1)(k+21)(4k+3)}{3}$$

por H.I.

$$1\cdot 2+3\cdot 4+\ldots+(2k-1)\cdot 2k=\frac{k(k-1)(4k-1)}{3} / +(2k+1)(2k+2)$$

desarrollando el lado derecho tenemos

$$\frac{k(k-1)(4k-1)}{3}+(2k+1)(2k+2)=\frac{k(k-1)(4k-1)+6(2k+1)(k+1)}{3}$$

$$\rightarrow \frac{(k+1)(4k^2+11k+6)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{3}$$

$\therefore$ *se cumple*

k) $1\cdot 2\cdot 3+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

para $n=1$, *se cumple*

suponemos para $n=k$

$$1\cdot 2\cdot 3+\ldots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

por demostrar para $n=k+1$

$$1\cdot 2\cdot 3+\ldots+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

por H.I.

$$1\cdot 2\cdot 3+\ldots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad /+(k+1)(k+2)(k+3)$$

desarrollando el lado derecho de la igualdad tenemos :

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)+4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

hacemos factor común, por lo que nos queda :

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

por lo tanto se cumple $\forall n \in IN$

n) n^3+2n *divisible por* 3,

para $n=1$ *se cumple*

suponemos para $n=k \rightarrow k^3+2k=3p$, *por demostrar para* $n=k+1 \rightarrow (k+1)^3+2(k+1)$

por H.I. tenemos

$$(k+1)^3+2(k+1) \rightarrow k^3+3k^2+3k+1+2k+2, \textit{reagrupando}$$

$$(k^3+2k)+3k^2+3k+3 \rightarrow \underbrace{(k^3+2k)}_{3p}+3(k^2+k+1) \rightarrow 3(p+k^2+k+1).$$

$\therefore$ se cumple

o) $10^{n}+3\cdot 4^{n+1}+5$ divisible por 9,

para $n=1$, se cumple, suponemos para $n=k, 10^{k}+3\cdot 4^{k+1}+5=9p$,

por demostrar para $n=k+1$

$\rightarrow 10^{k+1}+3\cdot 4^{k+2}+5$

$=10^{k}\cdot 10+3\cdot 4^{k+1}\cdot 4+5$

$=9\cdot 10^{k}+10^{k}+3\cdot 3\cdot 4^{k+1}+5$

$=\underbrace{10^{k}+3\cdot 4^{k+1}+5}_{9p}+9\left(10^{k}+4^{k+1}\right)$

haciendo factor común 9

$9\left(p+10^{k}+4^{k+1}\right)$

$\therefore$ se *cumple*

Respuestas GUIA 4
SUMATORIAS

1.-

a) $\sum_{i=1}^{15} 2i$

b) $\sum_{i=1}^{20} i$

c) $\sum_{i=1}^{5} 3^{i}$

d) $\sum_{i=1}^{6} i^{2}$

e) $\sum_{i=1}^{8} (2i-1)$

2.-

a) $\sum_{i=1}^{n} i+2$

b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$

c) $\sum_{i=3}^{n} 3i-2$

d) $\sum_{i=1}^{n} (3i-1)(3i+2)$

3.

a) $8-\sqrt{6}$

b) $\sum_{i=3}^{5} (-1)^{i} i^{2}$

c) 72.503.408

d) $\sum_{p=1}^{4} \frac{2}{p}$

e) $\frac{61}{144}$

f) $\sum_{i=1}^{4} i^{i}$

4.

a) 260

b) $\sum_{i=1}^{9} x_i (x_i-2)$

c) 94

5. *x=7*

6. Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

a) 1260
b) 2499
c) 105366
d) 338350
e) -856796
f) 709187
g) 2842,9
h) -114837
i) 1544875
j) -2812,3
k) 10681443
l) 270526,67
m) 44310
n) 109740
o) 336750
p) 10674720
q) 6786040
r) -182695

7. Demostraciones

8. Calcule usando propiedades:

a) 683550
b) 585200
c) 76755
d) 17100
e) 270940
f) 2030j-14490

9. Usando descomposición en fracciones parciales y propiedad telescópica, para probar que:

a) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

b) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)}-\frac{1}{(k+2)}\right)=\frac{n}{2(n+2)}$

c) $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i+1}-\frac{1}{2i+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$

d) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1/2}{i+1}-\frac{1/2}{i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{5/2}{i+1}-\frac{5/2}{i+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{4n+3}{2(n+1)(n+2)}$

e) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/3}{k}-\frac{1/3}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/6}{k+1}-\frac{1/6}{k+3}\right)=\frac{7}{36}-\frac{1}{6(n+1)}+\frac{1}{6(n+2)}+\frac{1}{6(n+3)}$

10. 624522

11. $\sum_{i=1}^{6}a_i(a_i-3)=21$.

12. El valor de la constante c=207,2 , si se sabe que: $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5}(2x_i-3y_j+c)=6000$,

$\sum_{i=1}^{6}x_i=18$ y $\sum_{j=1}^{5}y_j=22$.

RESPUESTAS GUÍA 5
PROGRESIONES

1. a) d=2, por tanto si es P.A.
   b) d=0 no es PA ni PG
   c) d=0 progresión constante
   d) d=4, por tanto si es P.A.
   e) d=-1, por tanto si es P.A.

3. $a_{20} = 39$
   $S_{20} = 400$

5. $d = \frac{1}{7}$
   $a_1 = \frac{33}{14}$

7. n=30

9. k=-1/8

11. $S_{50} = 3775$

15. $a_8 = 768$

17. $a_9 = 27\sqrt{3}$

19. $opción 1: (con r = 4)$
   $a_1 = 1/2 \, ; a_2 = 2 y a_3 = 8$
   $opción 2: (con r = 1/4)$
   $a_1 = 8; a_2 = 2 y a_3 = 1/2$

21. $a_p = a_1 \cdot r^{p-1} = a$
   $a_q = a_1 \cdot r^{q-1} = b$
   $a_r = a_1 \cdot r^{r-1} = c$

Pues bien tengo tres ecuaciones

$(I)\, a_p = a_1 \cdot r^{p-1} = a$
$(II)\, a_q = a_1 \cdot r^{q-1} = b$
$(III)\, a_r = a_1 \cdot r^{r-1} = c$

Elevaremos cada ecuación por lo correspondiente

$(I)\, a_p = a_1 \cdot r^{p-1} = a \quad ^{(q-r)}$
$(II)\, a_q = a_1 \cdot r^{q-1} = b \quad ^{(r-p)}$
$(III)\, a_r = a_1 \cdot r^{r-1} = c \quad ^{(p-q)}$

Cada ecuación quedará de la siguiente manera

$(I)\left(a_1 \cdot r^{(p-1)}\right)^{(q-r)} = a^{(q-r)}$
$(II)\left(a_1 \cdot r^{(q-1)}\right)^{(r-p)} = b^{(r-p)}$
$(III)\left(a_1 \cdot r^{(r-1)}\right)^{(p-q)} = c^{(p-q)}$
$a_1^{(q-q-r+r-p+p)} \cdot r^{(pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+rp-rq-p)} = a^{(q-r)} \cdot b^{(r-p)} \cdot c^{(p-q)}$

Entonces

$a_1^0 \cdot r^0 = a^{(q-r)} \cdot b^{(r-p)} \cdot c^{(p-q)}$
$1 = a^{(q-r)} \cdot b^{(r-p)} \cdot c^{(p-q)}$

25.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 32/25$$
$$a_3 = 39/25$$
$$a_4 = 46/25$$
$$a_5 = 53/25$$

29. $3456000

31. $1861593,85

33. Le conviene la primera modalidad en la que los sueldos estan en P.A.

RESPUESTAS GUÍA 6
FACTORIALES, BINOMIALES Y TEOREMA DEL BINOMIO

1.
a. 120
b. 24
c. 5034
d. 5033/55
e. 18981963/38
f. 10
g. 105
h. 26
i. 1/5040
j. 1/39312000

3.
a. n=20
b. n=5
c. n=7

5.
a. Usando propiedades, se tiene:

$$\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=$$
$$=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}$$

b.

$$\binom{n}{k+3}+3\binom{n}{k+2}+3\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=$$
$$\binom{n}{k+3}+\binom{n}{k+2}+2\binom{n}{k+2}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=$$
$$\binom{n+1}{k+3}+2\binom{n}{k+2}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n+1}{k+1}=$$
$$\binom{n+1}{k+3}+2\binom{n+1}{k+2}+\binom{n+1}{k+1}=$$
$$\binom{n+1}{k+3}+\binom{n+1}{k+2}+\binom{n+1}{k+2}+\binom{n+1}{k+1}=$$

$$\binom{n+2}{k+3} + \binom{n+2}{k+2} =$$

$$= \binom{n+3}{k+3}$$

7. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}}{\dfrac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \cdot \frac{(n-k+1)!(k-1)!\cdot k}{n!} =$$

Simplificando

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)!k!}{(n-k)!\,k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

9. a. $t_4 = \binom{20}{4}(2)^{16}x^{44}$

b. $k=10$ $t_{10} = \binom{20}{10}(2)^{10}x^{20}$

c. k=15

11. n=12
K=8, el noveno término es el independiente de x.

13. el quinto término (k=4) y el sexto término (k=5).

15. k=2 y k=1

17. El término central del binomio $(1+x)^{2n}$ es cuando k=n y el coeficiente es $\binom{2n}{n}$.

Análogamente los términos centrales del binomio $(1+x)^{2n-1}$ es cuando $k = \frac{2n-1-1}{2} = n-1$ y $k = \frac{2n-1+1}{2} = n$, y los coeficientes respectivamente son: $\binom{2n-1}{n-1}$ y $\binom{2n-1}{n}$.

Usando propiedades la suma es $\binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$

RESPUESTAS GUÍA 7
NÚMEROS COMPLEJOS

1. a. $\Re = \frac{-2}{3}, \Im = \frac{-5i}{3}$
   b. $\Re = 2, \Im = \frac{7i}{2}$

2. a. **2-9i**
   b. $\frac{-1-5i}{2}$
   c. 5

5.

a) z=$\sqrt{2}_{45°}$	g) z= $3_{270°}$	m) z=$20_{180°}$
b) z=$2_{60°}$	h) z=$6_{240°}$	n) $z = 2_{30°}$
c) z=$2_{315°}$	i) z=$5\sqrt{2}_{225°}$	ñ) z=$5_{53,13°}$
d) z=$\sqrt{2}_{315°}$	j) z= $4_{0°}$	o) z=$2\sqrt{2}_{45°}$
e) z=$4_{330°}$	k) z=$8_{330°}$	p) z=$3\sqrt{2}_{135°}$
f) z=$\sqrt{2}_{150°}$	l) z=$8_{90°}$	q) z=$2\sqrt{2}_{315°}$

7. a) $z_1 = 2\sqrt{2}_{15°}, z_2 = 2\sqrt{2}_{195°}$
   b)$z_1 = 2_{10°}, z_2 = 2_{130°}, z_3 = 2_{250°}$
   c)$z_1 = 3_{67,5°}, z_2 = 3_{157,5°}, z_3 = 3_{337,5°}, z_4 = 3_{337,5°}$
   d)$z_1 = 2_{0°}, z_2 = 2_{72°}, z_3 = 2_{144°}, z_4 = 2_{216°}, z_5 = 2_{288°}$
   e) $z_1 = 1_{0°}, z_2 = 1_{45°}, z_3 = 1_{90°}, z_4 = 1_{135°}, z_5 = 1_{180°}, z_6 = 1_{225°}, z_7 = 1_{270°}, z_8 = 1_{315°}$
   f)$z_1 = \sqrt[6]{2}_{15°}, z_2 = \sqrt[6]{2}_{135°}, z_3 = \sqrt[6]{2}_{255°}$
   g)$z_1 = 1_{30°}, z_2 = 1_{150°}, z_3 = 1_{270°}$
   h)$z_1 = 1_{18°}, z_2 = 1_{90°}, z_3 = 1_{162°}, z_4 = 1_{234°}, z_5 = 1_{306°}$

9.

a)
$$\Re(z+w) = \Re(z) + \Re(w)$$
$$z + w = (a+c) + i(b+d)$$
$$\rightarrow \Re(z+w) = (a+c)$$
$$\rightarrow a = \Re(z) y c = \Re(w)$$
$$por lo tanto \Re(z+w) = \Re(z) + \Re(w)$$

b)
$$\Re(zw) = \Re(z)\Re(w) - \Im(z)\Im(w)$$
$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
$$\rightarrow \Re(zw) = (ac - bd)$$
$$en donde ac = \Re(z)\Re(w) y bd = \Im(z)\Im(w)$$
$$por lo tanto se demuestra que \Re(zw) = \Re(z)\Re(w) - \Im(z)\Im(w)$$

c)
$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$
$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$
$$\rightarrow \overline{z+w} = (a + c) - i(b + d)$$
$$\rightarrow \overline{z+w} = (a + c) - bi - di$$
$$reagrupandotenemos:$$
$$\overline{z+w} = a - bi + c - di$$
$$loquecorrespondea$$
$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

d)
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$
$$z \cdot w = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$z \cdot w = ac + adi + bci - bd$$
$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
$$porlotanto$$
$$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - i(ad + bc)$$
$$\overline{z \cdot w} = ac - bd - adi - bci$$
$$hacemosfactorcomúnaynosqueda$$
$$a(c - di) - bd - bci$$
$$sustituimos - pori^2$$
$$a(c - di) + i^2bd + i^2bci$$
$$hacemosfactorcomúnbi$$
$$a(c - di) - bi(-di - ci^2)$$
$$teniendoencuentaquei^2 = -1nosqueda:$$
$$a(c - di) - bi(c - di)volvemosahacerfactorcomún$$
$$(a - bi) \cdot (c - di), loquecorrespondea: \overline{z} \cdot \overline{w}$$
$$portantoquedademostrado.$$

RESPUESTAS GUÍA 8
POLINOMIOS

1.
$$(1 + 2i)^3 - 3(1 + 2i)^2 + 7(1 + 2i) - 5$$
$$\rightarrow -2i - 11 - 3(4i - 3) + 7 + 14i - 5$$
$$\rightarrow 0i - 0 = 0$$
$$por\ lo\ tanto\ como\ p(1 + 2i) = 0$$
$$\rightarrow 1 + 2i\ es\ raíz.$$

3. a) $-cuociente: (2x^2 + x + 4)$
$-resto: -3$

b) $-cuociente: (x^3 + 4x^2 + 4x + 6)$
$-resto: 0$

c) $-cuociente: \left(\frac{x^4}{2} + \frac{(5x^3)}{4} + \frac{(17x^2)}{8} + \frac{(15x)}{16} - \frac{47}{32}\right)$
$-resto: \left(\frac{207}{32}\right)$

d) $-cuociente: (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$-resto: 0$

5. Muestre que el polinomio $p(x) = x^3 - 1$tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas $wy\overline{w}. Verifiqueque \overline{w} = wyque 1 + w + w^3 = 0$

1	0	0	-1	
	1	1	1	1
1	1	1	0	

Entonces 1 es la raíz real

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$$

$por\ tanto\ las\ raices\ de\ la\ ecuación\ cuadratica$

$$(x^2 + x + 1) = 0, son:$$

$$x_1 = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)}{2} = w$$

$$x_2 = \frac{(-1 - \sqrt{3}i)}{2} = \overline{w}$$

$$sea x_1 = w, x_2 = \overline{w}$$

$$\overline{w} = x^2$$

$$\frac{(-1 - \sqrt{3}i)}{2} = \frac{(1 - 2\sqrt{3}i - 3)}{4}$$

$$\frac{(-1 - \sqrt{3}i)}{2} = \frac{(-2\sqrt{3}i - 2)}{4}$$

$$\frac{(-1 - \sqrt{3}i)}{2} = \frac{(-\sqrt{3}i - 1)}{2}$$

$$\overline{w} = w^2$$

$$1 + w + w^3 = 0$$

$$w \cdot w^2 = 1$$

$$portantonosqueda 1 + \frac{(-1\sqrt{3}i)}{2} + 1 = 0$$

$loqueesdistintodecero, porlotantonosepuedeverificar.$

7. $k = \frac{-19}{2}$

9. a=7; b=-13
raíces de p(x)= -2; ½; -3; 1

11. a) $simplificación:$ $\frac{(x^2+2x+5)}{(2x^2+2x+3)}$
$valorenelpunto: 8/7$

b) $simplificación:$ $\frac{(2x^2+7x+9)}{(x^3+2x^2+4x+8)}$
$valorenelpunto: 31/32$

c) $simplificación:$ $\frac{(7x-4)}{(x^2-x+2)}$
$valorenelpunto: -11/2$

RESPUESTAS GIÍA 9
MATRICES

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ $A * B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$ $B * A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

$C * A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $B(A + B) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$ $2A + \frac{1}{2} * B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 6 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

$A^{-1} * B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $(A * B)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

a) $X = \frac{BC+A}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $X = CB - A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ -13 & -23 \end{pmatrix}$

c) $X = 2B + 2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$

d) $X = A^{-1} * B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $X = (B^{-1} * A)C^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}$

f) $X = (A + I)^{-1} * (C + B) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

g) $X = (A^{-1} * B) * C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

h) $X = \begin{pmatrix} -9/4 & 113/88 \\ 7/4 & -83/88 \end{pmatrix}$

i) $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $-2B = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
$A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

5. a) $x = -1 \quad y = -2/3$

b) $x = -2 \quad y \neq -10/9$

c) $x = 0 \quad y = -2/3$

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

9. $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Ayuda : $\begin{pmatrix} 2 * 2^{k.-1} & 2 * 2^{k.-1} \\ 2 * 2^{k.-1} & 2 * 2^{k.-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}$

11. $B^{-1} * A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $\quad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $\quad (A + C)^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{8}{75} & -\frac{1}{25} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

$A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5/3 \\ 7/2 & 5/6 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$

b) $B * A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A * B$

15. a=b=d=0 y c cualquier número real

17. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore Es\ involutiva$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore Es\ involutiva$

$\left(\frac{1}{2}\right) * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)(I - A) = \left(\frac{1}{4}\right)(I - A)^2$

$\therefore Es\ Idempotente$

$\left(\frac{1}{2}\right)(I - A) * \left(\frac{1}{2}\right)(I + A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(\frac{1}{2}\right) * \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)(I + A) = \left(\frac{1}{4}\right)(I + A)^2$

$\therefore Es\ Idempotente$

19. a) $x = -\frac{1}{2} \quad y = -2$

b) $y \neq 3x$

21. $X = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 7/2 & 15/2 \end{pmatrix}$

23. $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

Ayuda $\begin{pmatrix} 3*3^{n-1} & 3*3^{n-1} & 3*3^{n-1} \\ 3*3^{n-1} & 3*3^{n-1} & 3*3^{n-1} \\ 3*3^{n-1} & 3*3^{n-1} & 3*3^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix}$

25. Si satisface

Ayuda : $Det\ (A - Ix) = -x^3 + 12x + 16$

29. a) $I + A + A^2 + A^3 = (I - A)^{-1}$

$I - A + A^2 - A^3 = (I + A)^{-1}$

b) $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

31. a) $B^n = (P^{-1} * A * P)(P^{-1} * A * P)(P^{-1} * A * P)(P^{-1} * A * P) \ldots (P^{-1} * A * P)$

$= P^{-1} * A * I * A * I * I \ldots * A * P$
$= P^{-1} * A^n * P$

b) Si B es raiz,
$\Rightarrow p(x) = Det\,(B - tI)$

Dado $B = P^{-1} * A * P$

$p(x) = Det((P^{-1} * A * P) - tI)$
$\therefore$ *Si B es Raiz, A también lo es*

33. Las ecuaciones para encontrar a y b dan contradicciones…

35. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 + w + w^2 & 1 + w + w^2 \\ 1 + w + w^2 & 1 + w^3 + w^3 & 1 + w^2 + w^4 \\ 1 + w + w^2 & 1 + w^2 + w^4 & 1 + w^3 + w^3 \end{pmatrix}$

Se cumple para $w = -\frac{\sqrt{3}i + 1}{2}$ $w = \frac{\sqrt{3}i - 1}{2}$

37. Aquí quedé con dudas de los resultados

$$B=\begin{pmatrix} 2c & 2b-1 & 2a-8 \\ 7-8c & 8-8b & 50-8a \\ c & b & a \end{pmatrix}$$ Con a, b, c parámetros arbitrarios.

39. Se cumple para $k \geq 5,\ k \in \mathbb{N}$

41. $A=\left(\frac{1}{2}\right)(A+A^t)+\left(\frac{1}{2}\right)(A-A^t)$

$\left(\frac{1}{2}\right)(A+A^t)$ *Simétrica* $\left(\frac{1}{2}\right)(A-A^t)$ *Antisimétrica*

43. a) Falso
b) Verdadero
c) Verdadero
d) Falso
e) Falso
f) Falso
g) Falso
h) Falso

RESPUESTAS GUIA 10
SISTEMAS DE ECUACIONES

1. a $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/3 \\ -1/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}$

b. $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -0{,}75 & -2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2{,}25 & -1{,}25 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_4 - 0{,}75x_5 - 2{,}5 \\ x_2 = 1{,}75x_5 + 1{,}75 \\ x_3 = -2{,}25x_5 - 1{,}25 \end{array}$

Las variables básicas son x_1, x_2 y x_3 y los parámetros son x_4 y x_5

$x_1 = s - 0{,}75t - 2{,}5;\ \ x_2 = 1{,}75t + 1{,}75;\ x_3 = -2{,}25t - 1{,}25\ ;\ x_4 = s;\ \ x_5 = t$

c. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. k=7

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -7/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6/5 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 13/20 & -1/4 & 18/5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1{,}75x_4 + 0{,}75x_5 \\ x_2 = 1{,}2x_4 + 1{,}2 \\ x_3 = 0{,}65x_4 - 0{,}25x_5 + 3{,}6 \end{array}$

5. a. $a \in IR - \{-1{,}1\}$
b. $a=-1$
c. $a=1$

7. a. $x_1 = 29/14;\ \ x_2 = -3/4;\ x_3 = 23/7;\ \ x_4 = 11/14$
b. $x_1 = s;\ \ x_2 = 6s - 9;\ x_3 = 16s + t - 20\ ;\ x_4 = 5s + 3t - 6;\ \ x_5 = -8s + 3t + 16; x_6 = t$