Universidad Finis Terrae
Escuela de Ingeniería Comercial
Asignatura: Álgebra
Segundo Semestre 2015

Guía 6 : Factoriales, Binomiales y Teorema del Binomio

1. Calcule el valor

   a) $5!$ *b*) $(7-3)!$ *c*) $7!-3!$ *d*) $\frac{10!-7!}{8!-6!}$ *e*) $\frac{80!+78!}{77!-76!}$
   f) $\binom{5}{2}$ *g*) $\binom{15}{13}$ *h*) $\binom{26}{1}$ *i*) $\frac{5!}{12!}\binom{12}{5}$ *j*) $\frac{9!}{20!}\binom{22}{7}$

2. Simplifique al máximo las siguientes expresiones:

   a) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ *b*) $\frac{(k+1)!(3k-2)!}{(3k+1)!(k-1)!}$ *c*) $\binom{n+1}{n}$ *d*) $\frac{1}{(2n-1)}\binom{2n}{2}$ *e*) $\frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$

3. Usando la definición de binomial, resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $\binom{n}{2}=190$ *b*) $\binom{2n}{2n-2}=45$ *c*) $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=28$

4. Usando la definición de binomial, demuestre las siguientes propiedades de los binomiales:

   a) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ *b*) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ *c*) $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

5. Demuestre

   a) $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+2}$ *b*) $\binom{n}{k+3}+3\binom{n}{k+2}+3\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+3}{k+3}$

6. Usando las propiedades de los binomiales, resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $\binom{n}{3}=\binom{n}{9}$ *b*) $\binom{n}{10}+\binom{n}{11}=\binom{n+1}{21}$ *c*) $\binom{52}{2r-1}=\binom{52}{r+8}$
   d) $\frac{\binom{n}{5}-\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}+\binom{n}{4}}=\frac{1}{2}$

7. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\binom{n+1}{2}$.

8. Escriba el desarrollo de los siguientes binomios:

   a) $(2x+y)^4$ *b*) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$
   c) $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{y}\right)^5$ *d*) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^6$

9. Dado el binomio $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^{20}$ encuentre si es que existen:

   a) El quinto término.
   b) El término central.
   c) El término independiente de x.

10. En el desarrollo de $x^6\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$, encuentre si existen:

    a) El término independiente de x
    b) El término que contiene a x^{18}

11. En el desarrollo de $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ los coeficientes de los términos cuarto y décimo, son iguales. Encuentre el valor de n y el término independiente de x.

12. Determine los distintos valores de n para que en el desarrollo de $\left(x^3-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ exista tenga un término que contenga a x^5.

13. Determine el término que contiene a x^2 en el desarrollo de $(1+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

14. Determine el término que contiene a x^n en el desarrollo de $(1-x+x^2)(1+x)^{2n+1}$.

15. Encuentre el término que contiene a x^3 en el desarrollo de $(1+x+x^2)^7$.

16. Determine el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{12}$.

17. Pruebe que el coeficiente del término central de $(1+x)^{2n}$ es igual a la suma de los coeficientes de los dos términos centrales del binomio $(1+x)^{2n-1}$.

18. Demuestre que

    a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

    b) $\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{2n}=\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}$

19. Calcule las sumas

    a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}$

    b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{10}\binom{10}{i}$

    c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{12}\binom{10}{i+2}$

    d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{12}\binom{11}{i+2}$

20. Demuestre que

    a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

    b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\cdot(2^{n+1}-1)$.

21. Demuestre que

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r}+\binom{n}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{r-2}+\ldots+\binom{n}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}.$$