Lógica y Conjuntos

Lógica

- Conectivos
- Proposiciones
- Tablas de verdad
- Propiedades
- Cuantificadores Universal y existencial
- Negación

Conjuntos

- Conjuntos importantes
- Operaciones
- Propiedades
- Encuestas

Lógica

La **lógica** es un lenguaje matemático, que está compuesto por proposiciones y conectivos. Por lo que podemos escribir un párrafo sin usar palabras.

Proposición:

Es una expresión (frase o juicio) de la cual se tenga sentido inequívoco, es decir, es verdadera o falsa.

Ejemplos:

- El Comercio crece 10% el último trimestre.
- China ordena a sus fábricas reducir producción de materias primas.
- El Hotel Marriot es el edificio más alto de Chile.

Las proposiciones se denotan con las letras minúsculas p, q, r, s, t,…

Clase de proposiciones

1. Proposiciones Simples:

Son aquellas en las que aparece **una** afirmación o acción.

Ejemplos:

- El fin de semana voy a estudiar álgebra.

- "Dólar se dispara hasta los $664".

- Postulaciones al premio Nacional de Innovación Avonni 2015 suben 27%".

Clase de proposiciones

2. Proposiciones Compuestas:

Son aquellas que están constituidas por proposiciones simples, enlazadas entre si.

Ejemplos:

-El fin de semana estudiaré álgebra y cálculo.

-“Cobre vuelve a caer por descalabro en China y anota un nuevo mínimo en más de seis años y medio”.

- “Esperan que el gobierno se enfoque en inversión en infraestructura y también que exista un dialogo abierto para discutir las reformas”.

Conectivos

Conjunción

Es aquella operación que vincula dos proposiciones mediante el conectivo "y", o alguna expresión equivalente.

Ejemplos:

- El 2 es un número par y el perro es un animal.

- Baja desocupación y alza en salarios hacen crecer 10% ventas del comercio.

La conjunción es verdadera si ambas proposiciones que la forman son verdaderas. Es decir:

$$p \wedge q \quad es \quad V \quad si \quad V \wedge V$$

Disyunción

Es aquella operación que vincula dos proposiciones mediante el conectivo "o".

Ejemplos:

- Regalaré los zapatos viejos o los zapatos negros.

- Sebastián invertirá en AESGENER o SQM $1.000.000.

La disyunción es verdadera si alguna de las proposiciones que la forman es verdadera, y es falsa cuando las proposiciones que la forman son ambas falsas. Es decir:

$$p \vee q \quad es \quad F \quad si \quad F \vee F$$

Condicional

Es aquella operación que toma dos proposiciones, llamando a la primera antecedente y a la segunda consecuente uniéndolas a través del conectivo “si…entonces”

Consideraremos la siguiente proposición:

"Si obtienes un 7 en lógica, entonces te voy a comprar un Mustang amarillo.“

El condicional es falso si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Es decir:

Además existe la siguiente analogía

$$p \Rightarrow q \quad es \quad F \quad si \quad V \Rightarrow F$$

$$p \Rightarrow q \quad \cong \neg p \vee q$$

Bicondicional

Es aquella operación que vincula dos proposiciones mediante el conectivo "si y sólo si".

Ejemplo

Paula estudia Inglés si y sólo si viaja al extranjero.

El Bicondicional es verdadero si las proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Es decir:

$$p \Leftrightarrow q \quad es\ V \quad si \quad V \Leftrightarrow V\ o\ F \Leftrightarrow F$$

Negación

Es una operación que afecta a la proposición cambiándole su valor de verdad. Utiliza el adverbio "no".

Ej: p: Sofía viajará a La Serena

$\neg p$: Sofía no viajará a La Serena

Tablas de verdad

Una tabla de verdad es una tabla que muestra los valores de verdad para todos los casos posibles de una proposición compuesta.

Las siguientes tablas son de las proposiciones con los conectivos conocidos.

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tablas de verdad

Condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Negación

p	$\neg p$
V	F
F	V

Construcción de una Tabla de verdad

Para construir una tabla de verdad, se debe determinar cuantas combinaciones (filas) de valores de verdad hay que es igual a 2^n , donde n=n° de proposiciones distintas.

Ejemplo: construya la tabla de verdad de la proposición: $(p \vee q) \wedge \neg p$

n° combinaciones=2^2=4

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Ejercicio propuesto:

Construya la tabla de verdad de la siguiente proposición: $\left[p \vee (q \Rightarrow r)\right] \wedge \neg q$

p	q				

Clasificación de las proposiciones compuestas según su valor de verdad.

Tautología

Son Tautología las proposiciones compuestas que son verdaderas sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: Verifique con una tabla de verdad que la siguiente proposición es una tautología.

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

Contradicción

Son Contradicción las proposiciones compuestas que son Falsas sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: Verifique con una tabla de verdad que la siguiente proposición es una contradicción.

$$\neg\big(p \wedge (p \vee q)\big) \Leftrightarrow p$$

Contingencia

Son Contingencia todas las proposiciones compuestas que no son tautología ni contradicción, es decir las proposiciones que dependen del valor de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: Determine con una tabla de verdad si la siguiente proposición es una contradicción, tautología o contingencia.

$$p \Leftrightarrow (\overline{r} \wedge q)$$

Equivalencias lógicas (Tautologías Conocidas)

Las leyes lógicas son aquellas proposiciones que son tautologías. Sean p, q y r proposiciones.

- Propiedad idempotente

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$
$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

- Condicional

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

- Bicondicional

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

- Ley de la doble negación

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$

- Ley de Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Equivalencias lógicas (Tautologías Conocidas)

- Asociatividad

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

- Conmutatividad

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$
$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

- Distributividad

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Absorción

$$(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$$
$$(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$$

Equivalencias lógicas (Tautologías Conocidas)

$$(p \wedge V) \Leftrightarrow p$$

$$(p \vee V) \Leftrightarrow V$$

$$(p \wedge F) \Leftrightarrow F$$

$$(p \vee F) \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow V$$

Ejemplos

Reduzca usando las equivalencias lógicas (propiedades)

1. $(p \wedge \neg q) \vee q$

2. $p \wedge (q \Rightarrow p)$

3. $\left[\left(p \vee q\right) \Rightarrow (\neg p \wedge q)\right]$

4. $\left[\left(p \wedge \neg q\right) \Rightarrow \neg p\right] \Rightarrow q$

Función Proposicional

Es una proposición que contiene variables, su valor de verdad depende de los valores que se asignan a las variables que contiene. Se denota por:

$$p(x), q(x), etc.$$

$$ej:$$

$$p(x): x \text{ es un número par} / x \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{q(x): x \ es \ mayor \ que \ 10/x} \in \mathrm{IN}$$

Cuantificadores

Es una expresión que indica si las variables de la función proposicional se toman en todo el conjunto o parte de él (cantidad).

1. Cuantificador universal $(\forall)$: Se lee "para todo" e indica que todos los valores de la variable deben hacer que la función proposicional sea verdadera.

2. Cuantificador existencial $(\exists)$: Señalado como "existe algún", significa que habrá algún elemento del dominio de la variable quien hace de la función proposicional sea una proposición verdadera.

Ejemplo :

1. $Si\ A = \{0,2,4,6,8\}$ indicar el valor de verdad de:

   $i.\ \forall x \in A : x + 3 < 12$

   $ii.\ \exists x \in A : x + 8 < 12$

$iii. \quad \exists x \in A : 3 - x \geq 5$

$$iv. \quad \forall x \in A : \frac{x}{x+1} > 0$$

2. $Sea\ A = \{0,1,2\}$ determinar el valor de verdad de:

$i. \quad \forall x \in A, \forall y \in A : y^2 \leq 4(x+1)$

$ii. \quad \exists x \in A : \forall y \in A : (x-1)^2 \leq y$

3. Si $p \Theta q$ solo es verdadero cuando p y q son falsos. Hallar el valor de verdad de:

$$\left(\neg p \Theta q\right) \Theta \left(q \Theta \neg r\right) \ si:$$

$$p: 2 \text{ es número impar}$$

$$q: \quad \forall x \in A = \{1,2,3\} : x + 1 > 1$$

$$r: \quad \exists x \in B = \{2,4,6\} : x^2 = 9$$

Negación de proposiciones que contienen cuantificadores

Al negar una proposición que contiene un cuantificador, se cambia el cuantificador respectivo (universal por existencial y viceversa) y se niega la proposición abierta respectiva.

Es decir

1. $\neg(\forall x : p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$

2. $\neg(\exists x : p(x) \equiv \forall x : \neg p(x)$

Obs:

Símbolo	Negación
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$=$	$\neq$

Ejercicios:

1. Niegue las proposiciones y luego determine el valor de verdad de éstas.

i. $p: \ \forall x \in IN : x^2 > x$ *ii.* $q : \forall x \in Z : x+1 > x$

iii. $r : \exists x \in IR : x^2 = x$

2. Negar y reducir la proposición

$$\left(\forall x : \left[p(x) \wedge q(x)\right]\right) \Rightarrow \left(\exists x : \left[p(x) \vee q(x)\right]\right)$$

3. Dadas las proposiciones

$p : \neg\{\forall x \in Q, x+2 > 0\}$ $r : \ \forall x \in Z : \dfrac{x}{x} = 1$

$q : \ \exists x \in IN : 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$

Hallar el valor de verdad de: $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Conjuntos

Definición : Un conjunto es una colección de elementos que poseen una característica común.

Se pueden Expresar de 2 formas:

- Comprensión (forma genérica)
- Extensión (elemento a elemento)

Los Conjuntos se denotan por letras Mayúsculas y los elementos que lo componen con letras Minúsculas.

Cuando un elemento está en el conjunto se usa el símbolo **pertenece** “$\in$ “

Ejemplos:

1. Escriba los siguientes conjuntos por extensión.

$$A = \{ \ vocales \ \}$$

$$B = \{ x \in IN \ / \ x \leq 5 \ \}$$

$$C = \{ x \in IR \ / \ x^2 - 2x = 0 \ \}$$

$$D = \left\{ x \in IN \ / \ x = \frac{3n}{2}, con \ n \in IN \right\}$$

2.Escriba los siguientes conjuntos por comprensión

$$A = \{ a, e, i \}$$

$$B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

$$C = \{ -1, 1 \}$$

$$D = \{ 1, 3, 9, 27, \ldots \}$$

Ejercicios propuestos

1. Escriba los siguientes conjuntos por extensión.

$$A = \left\{ x \in IN \,/\, x = 2n - 1,\ con\ \ n \in IN \right\}$$

$$B = \left\{ x \in Q \ \ / \ \ x = (-1)^n \ \frac{n+1}{n+2}\ ,\ con\ n \in IN \right\}$$

$$C = \left\{ x \in Z\ /\ \ x = 2^{n+1} - 10,\ con\ n \in IN \right\}$$

2. Escriba los siguientes conjuntos por comprensión.

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ ..... \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{5}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{9}{6}, -\frac{11}{8}, \frac{13}{10}\ ...... \right\}$$

$$C = \left\{ -1, 1,\ 3,\ 5,\ ..... \right\}$$

Conjuntos Importantes

- **Conjunto Universal (U)** : Se le llama a aquel que contiene todos los elementos que interesan en una situación determinada.

  Así por ejemplo, para los conjuntos

  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

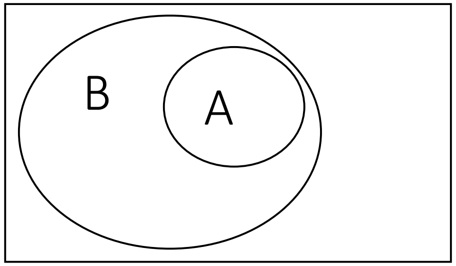
  el conjunto universal podría ser

  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- **Conjunto Vacío (Φ o $\{\ \}$)** : Es aquel conjunto que carece de elementos.

  Ejemplo: $A = \{x^2 + 1 = 0 \mid x \in IR\}$

- Sub-conjunto ($\subseteq$): Un conjunto A es subconjunto de B si todo elemento de A es un elemento de B. Se denota $A \subseteq B$



- Igualdad (=) : Dos conjuntos A y B son iguales, A=B, si todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A.

Conjunto potencia

Definición: Es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto. El número de subconjuntos que tiene un conjunto es 2^n, n es el número de elementos del conjunto.

Ejemplos:

1. Si tenemos un conjunto A={a}, entonces tiene 2^1 subconjuntos que son {a} y { }.

Entonces el conjunto potencia es:

P(A) = { {}, {a} }

2. Si tenemos un conjunto B={a,b}, entonces tiene 2^2 =4 subconjuntos que son {a}, {b}, {a,b} y { }.

Entonces el conjunto potencia es:

P(B) = { {}, {a}, {b}, {a, b} }

3. Si tenemos un conjunto C={a,b,c}, entonces tiene 2^3 =8 subconjuntos que forman el conjunto potencia:

P(C) = { {}, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} }

Ejercicios

Se tiene $A = \{0, 1, \{2\}, \{3\}\}$

Reemplace el símbolo que corresponda (pertenece o subconjunto) en relación al conjunto A

$$a.\quad 1 \_\_\_\_ A$$

$$b.\quad 2 \_\_\_\_ A$$

$$c.\quad \{2\} \_\_\_\_ A$$

$$d.\quad \{\{2\}\} \_\_\_\_ A$$

$$e.\quad \{0,1\} \_\_\_\_ A$$

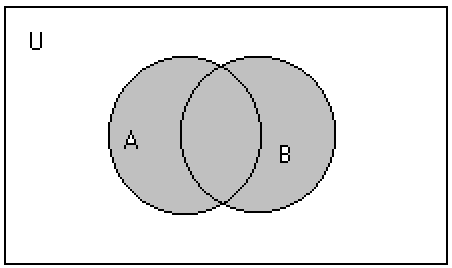
$$f.\quad \phi \_\_\_\_ A$$

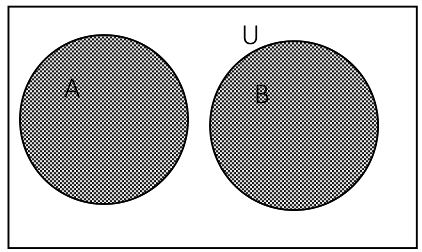
Operaciones con Conjuntos

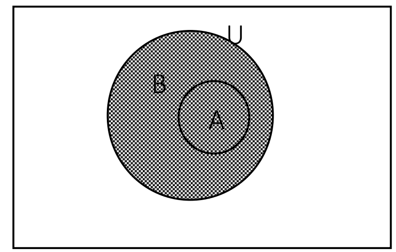
La **unión** entre los conjuntos

$$A \bigcup B = \{x \in U \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

Gráficamente:(Diagrama de Venn-Euler)



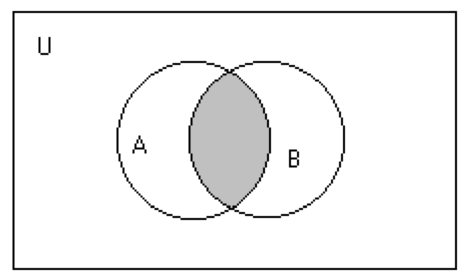




La **intersección** entre los conjuntos

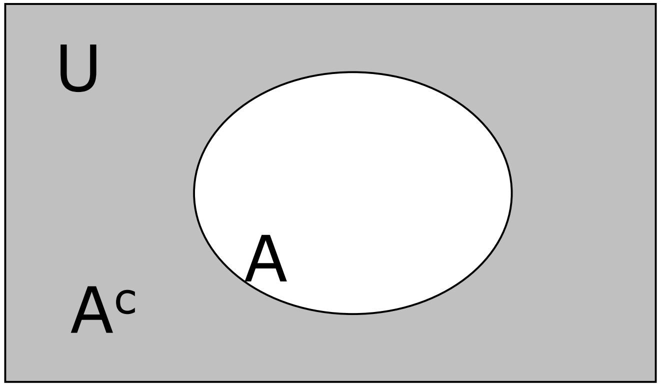
$$A \bigcap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

Gráficamente:



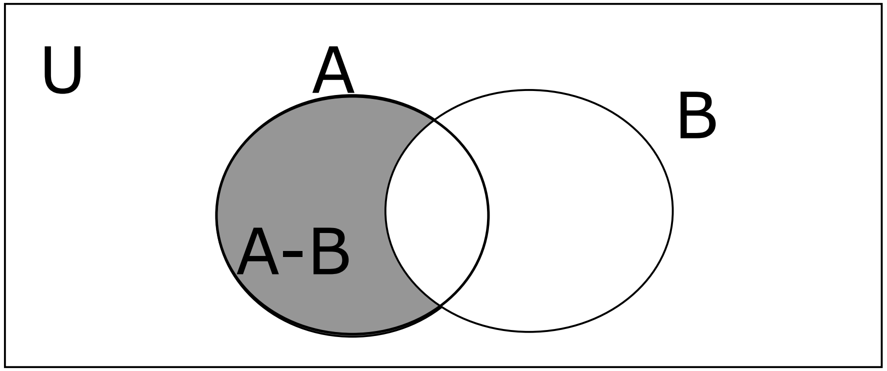
El complemento de un conjunto

$$A^C = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$$



La diferencia entre los conjuntos

$$A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$



Ejemplo 1:

Sean $A=\{m,a,g,o\},\quad B=\{c,i,e,l,o\},\quad C=\{l,a,r,g,o\}$
y $U=\{m,u,r,c,i,e,l,a,g,o\}$

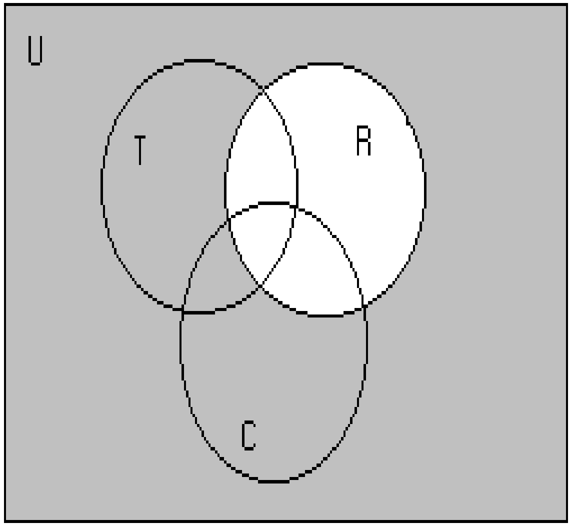
Determine por extensión: $(A\cup B)-C$ ________________________

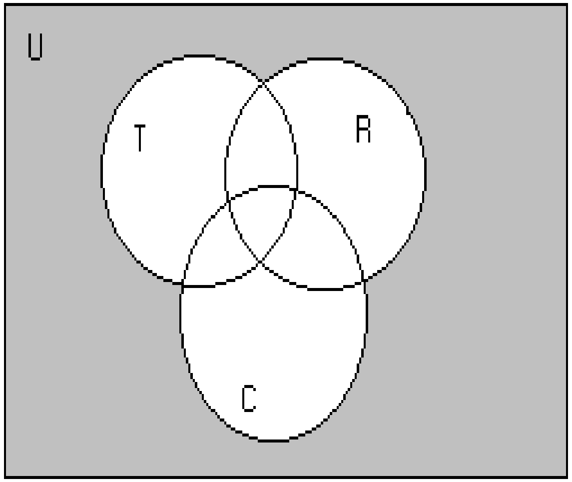
Busque una expresión conjuntista que tenga como resultado el conjunto $\{a,l,g,o\}$

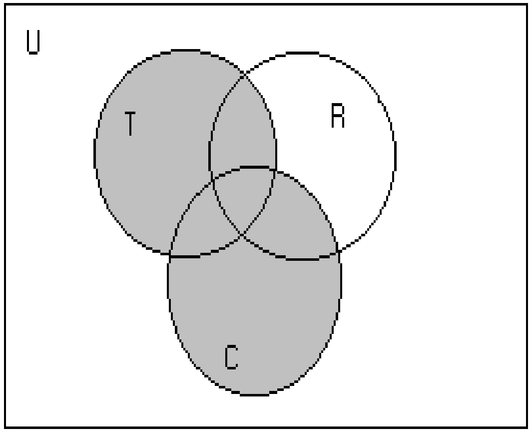
____

Ejemplo 2:

Determine en forma conjuntista la zona que está achurada (gris) en los siguientes diagramas:







Propiedades

a. Conmutatividad de la intersección y unión.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

b. Asociatividad de la intersección y unión.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

c. Distributividad de la unión con respecto a la intersección y viceversa

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d. Leyes de Morgan

Corresponden a las respectivas leyes de Morgan relativas a la disyunción y a la conjunción

$$\boxed{(A \cup B)' = A' \cap B'}$$

$$\boxed{(A \cap B)' = A' \cup B'}$$

Propiedades

e. Idempotencia.

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

f. Absorción

$$A \cup \left(A \cap B \right) = A$$

$$A \cap \left(A \cup B \right) = A$$

g. Equivalencia de la diferencia.

$$A - B = A \cap B^{C}$$

Además se verifica las siguientes equivalencias:

$$\mathrm{A} \cap \phi = \phi$$

$$\mathrm{A} \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cup \phi = A$$

$$\mathrm{A} \cap A^c = \phi$$

$$A \bigcup A^c = U$$

$$\phi^c = U$$

$$U^c = \phi$$

Ejercicios
Demuestre las siguientes igualdades:

a) $(A - B) \cap B = \phi$

b) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

c) $(A \cup A) \cap (A \cup B^c) = A$

d) $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$

e) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

Cardinalidad

La cardinalidad de un conjunto A es el número de elementos distintos que el conjunto contiene. Esto lo denotaremos por "#".

Un conjunto A es finito si su cardinalidad es un número natural determinado.

Sean A, B y C conjuntos arbitrarios finitos y #A, #B, #C, las cardinalidades respectivas; entonces se satisfacen las siguientes fórmulas:

1. $\#\phi = 0$

2. $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

3. $$\#\left(A \cup B \cup C\right) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Ejemplos: Cardinalidad de un conjunto

1. Calcule #A en los siguientes casos:

$$i.\ A=\{x\in IR/x^2-2x+1=0\}$$

$$ii.\ A=\{n\in IN/n^2\leq 20\}$$

$$iii.\ A=\{x\in IR/2x^2-x+12=0\}$$

$$iv.\ A=\{z\in Z/|z|\leq 59\}$$

Ejemplos Encuestas

2. en una reunión social de 70 personas se observó lo siguiente:

25 personas consumieron ron, 40 personas tomaron Coca Cola y 60 personas bebieron ron o Coca Cola.

¿Cuántas personas tomaron cuba libre?, ¿Cuántas personas no tomaron ron no Coca Cola?

3. En un curso de 70 alumnos, se sabe que 7 de ellos practican tenis y fútbol, 10 practican tenis y atletismo, 8 atletismo y fútbol, 15 sólo juegan fútbol, 20 sólo atletismo y 10 sólo tenis. Si se sabe que 10 alumnos no practican ningún deporte, determine cuántos alumnos practican los tres deportes.