Matrices

-Dimensión de una matriz
- Tipos de matrices
- Operaciones de matrices
- Igualdad de matrices
- Matriz traspuesta, simétrica y antisimétrica
- Otros tipos de matrices cuadradas
- Determinantes
- Inversa de una matriz
- Operaciones elementales y rango de una matriz
- Ecuaciones matriciales
- Sistemas de ecuaciones
- Método de Cramer

Una **matriz** es una forma común para resumir y presentar números o datos y se define como un arreglo rectangular de elementos, cuyos elementos están ordenados en filas y columnas.

Uso: Siempre que se manejan datos, se debe interesar en organizarlos de manera tal que sean significativos y se puedan identificar con facilidad.

Representación de una matriz

Considere las calificaciones de 5 alumnos (filas) en 3 solemnes (columnas) de un curso.

$$
\begin{array}{llccc}
 & & solemne\,1 & solemne\,2 & solemne\,3 \\
 & Estudiante\,1 & & & \\
 & 2 & & & \\
Filas & 3 & & & \\
 & 4 & & & \\
 & 5 & & &
\end{array}
\quad
\begin{pmatrix}
5{,}2 & 6{,}0 & 6{,}2 \\
6{,}5 & 6{,}7 & 7{,}0 \\
4{,}8 & 5{,}3 & 4{,}1 \\
5{,}2 & 6{,}5 & 6{,}8 \\
4{,}3 & 4{,}5 & 4{,}0
\end{pmatrix}
$$

Dimensión de una matriz

Los **nombres** de la matriz generalmente se representan con letras mayúsculas (A, B, ..) y los elementos de la matriz con letras minúsculas (a, b,…).

Una matriz se caracteriza también por su **dimensión** (orden) que indica el número de filas y columnas contenido en ésta. Si una matriz contiene m filas y n columnas, se dice que tiene una dimensión $\underline{m \ x \ n}$ (m por n).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejercicios

1. Encuentre una matriz de orden 2x5 tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ i + j & si \quad i \neq j \end{cases}$$

2. Encuentre una matriz de orden 4x3 tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} i^{j} & i \leq j \\ 2j - 1 & i > j \end{cases}$$

Tipos de Matrices

Matriz cuadrada

Una matriz es cuadrada si tiene el mismo número de filas y columnas.

Ejemplo de matrices cuadradas.

$$A = (3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular y diagonal

Una matriz es **triangular superior** si: $a_{ij} = 0, cuando\ i > j$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Una matriz es **triangular inferior** si: $a_{ij} = 0, cuando\ i < j$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz diagonal: Es la matriz en que $a_{ij} = 0, cuando\ i \neq j$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz nula y Matriz identidad

- La **matriz nula** es aquella matriz donde todos sus elementos son ceros (0).

- La **matriz identidad** I es cuadrada y cumple que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y el resto de los elementos son 0.

En forma general se representa:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son matrices identidad de (2x2) y (3x3)

Operaciones: Adición y sustracción

Propiedades de la adición (sustracción) de matrices

Se pueden sumar o restar dos matrices si y sólo si tienen la misma dimensión.

Si A y B son matrices ($m \ x \ n$) sumadas para formar una nueva matriz C, C tendrá la misma dimensión que A y B. Los elementos de C se encuentran al sumar los elementos correspondientes de A y B.

Es decir,

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para toda i y j

Ejercicios:

Dadas

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$$

Calcule

$a.\quad A+B$

$b.\quad A-C$

Multiplicación escalar

Un escalar es un número real. La multiplicación escalar de una matriz es el producto de cada elemento de la matriz por el escalar. Por ejemplo si k es un escalar y A la siguiente matriz (3x2), entonces:

$$kA = k\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k & 3k \\ -2k & k \\ 0 & 4k \end{pmatrix}$$

Dadas $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule:

1. $2A - 3B$
2. $\frac{1}{2}B + A$

Multiplicación de matrices

Suponga que una matriz A que tiene una dimensión $m_A x n_A$ se tiene que multiplicar por una matriz B que tiene una dimensión $m_B x n_B$.

Propiedades

I. El producto matricial AB está definido si y sólo si el número de columnas de A equivale al número de filas de B ($n_A = m_B$)

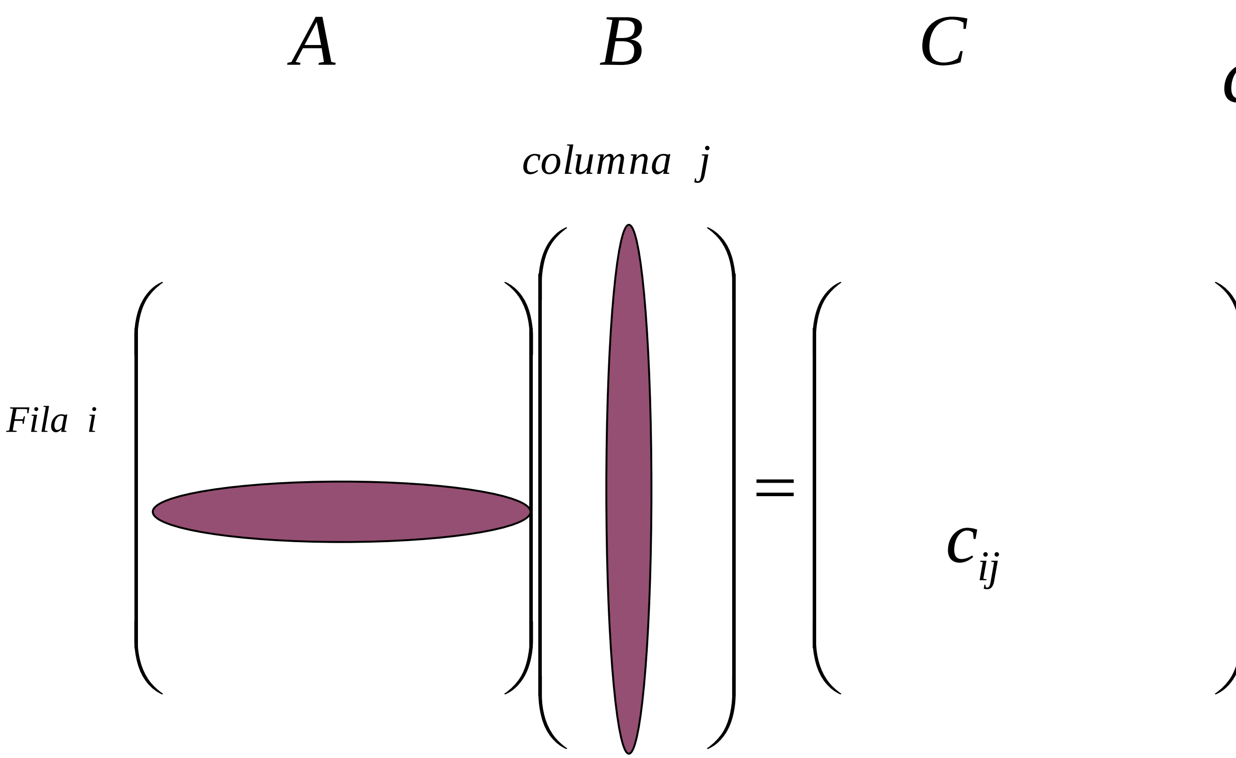
II. Si se puede realizar la multiplicación (condición anterior), el producto resultante será una matriz que tiene la dimensión $m_A x n_B$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ (m_A \ x \ n_A) & & (m_B \ x \ n_B) & & (m_A \ x \ n_B) \end{array}$$

$$n_A = m_B$$

Regla de cálculo

Si AB=C, un elemento c_{ij} de la matriz que resulta del producto es igual al producto interno de los elementos de la fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B.



$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Ejercicios:

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule, si es posible:

a. AD

b. DA

c. AB

d. A^2

e. BA

f. BC

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son iguales, si y sólo si cada elemento

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Ejercicios:

Determine los valores de las variables de modo que las siguientes matrices sean iguales:

$$a. \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2 & z \\ 4 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$b. \quad \begin{pmatrix} x+2 & 5 & y-3 \\ 4 & z-6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & t+1 & 2y-5 \\ 4 & 2 & z-1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

1. Sean las siguientes matrices

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine:

$a.$ $PI=T$

$b.$ $PA=C$

$c.$ $BP=D$

Ejercicios

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calcule

$$A^2 + 2A - 3I$$

3. Sean las matrices,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, si es posible:

$a.\ 5CD$

$b.\ DC$

$c.\ CE$

Ejercicios

4. Resuelva las ecuaciones si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$a.\ 2X - C = BA$

$b.\ X + B^2 = AC$

$c.\ \dfrac{1}{3}X + C = X - 2B$

Matriz Traspuesta

Dada la matriz A (mxn) con elementos a_{ij}, la traspuesta de A, expresada como A^T, es una matriz (nxm) que contiene elementos a^t_{ij} donde $a^t_{ij}=a_{ji}$.

Ejercicios:

Dadas las siguientes matrices encontrar la traspuesta:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Propiedades matriz traspuesta

$i. \ (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

$ii. \ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$iii. \ (A^t)^t = A$

Ejemplo:

Sean $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a. Calcule $\quad A \cdot B^t, \quad (A^t \cdot B)^t$

b. Calcule el valor de la matriz X si: $\quad 2X + (B^t A)^t = 0$

Matriz simétrica y antisimétrica

- Una matriz A es simétrica si es cuadrada y $A=A^t$

Ejemplos:

$$a.\quad I_n \qquad\qquad b.\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- Una matriz A es antisimétrica si es cuadrada y $A=-A^t$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Otros tipos de matrices cuadradas

- Matriz idempotente: $A \cdot A = A$

Ejemplo: Sea A compruebe que $A^2=A$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- A es involutiva si: $A \cdot A = I$

Ejemplo: Sea A compruebe que $A^2=I$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$$

- A es nilpotente: $A \cdot A \cdot ..... \cdot A = 0$

Ejemplo: Sea A compruebe que $A^3=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

El Determinante

Si una matriz es cuadrada, los elementos de la matriz se pueden combinar para calcular un número de valor real llamado **determinante.** El concepto del determinante es de particular importancia para resolver un sistema de ecuaciones o determinar si existe la inversa de una matriz.

El determinante de la matriz A, se denota:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Hay diferentes formas de calcular el determinante, según el orden de la matriz.

- Si es una matriz de 1x1, el determinante es el valor del único elemento que tiene la matriz.

$$A = (a) \Rightarrow |A| = a$$

- Si es una matriz de 2x2, se calcula de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a \cdot d - b \cdot c$$

Ejercicios: Calcule el determinante de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si es una matriz de 3x3, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se puede calcular la matriz según el siguiente proceso:

1. Copie las dos primeras columnas de la matriz al lado derecho de la matriz original.
2. Localice los elementos en las tres diagonales primarias (P1, P2, P3) y los de las tres diagonales secundarias (S1, S2, S3).

3. Multiplique los elementos de cada diagonal primaria y secundaria.
4. El determinante equivale a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos la suma de las diagonales secundarias.

Determinante=(P1+P2+P3)-(S1+S2+S3)

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{S1} \quad \text{S2} \quad \text{S3} \\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{P1} \quad \text{P2} \quad \text{P3} \end{array}$$

Ejercicios:

Calcule el determinante de las siguientes matrices:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 10 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & 10 & -5 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

i. Si todos los elementos de cualquier fila o columna son cero,

$$|A| = 0$$

ii. Si se intercambian dos filas o columnas cualquiera, el signo del determinante también cambia.

iii. Si los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por el número.

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

iv. Si dos filas (o columnas) son iguales o múltiplo de otra,

$$|A| = 0$$

Inversa de una matriz

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, si realizamos un cálculo sencillo muestra que AB=BA=I_2, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz B se llama matriz inversa de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Si A tiene inversa, se dice **invertible**.

Una matriz cuadrada que **no es invertible** se le denomina **singular** y una matriz **invertible** se llama **no singular.**

Propiedades

1. Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

2. Sean A y B dos matrices invertibles de nxn. Entonces AB es invertible y $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

3. Si A es invertible, el sistema AX=b tiene una solución única x=A^{-1}b

Rango de una matriz

• El **rango de una matriz** es el número de filas no nulas que tiene dicha matriz. (Una fila es nula cuando todos sus elementos son ceros.)

• El rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes que tiene dicha matriz. (Dos filas son linealmente independientes cuando no hay relación de proporcionalidad entre sus elementos correspondientes; esto es, cuando una fila no puede obtenerse multiplicando la otra por un constante: i j F ≠ kF . Si lo extendemos a tres filas se tendrá: si 3 1 2 F = pF + qF , la tercera fila depende linealmente de las dos primeras; en caso contrario son linealmente independientes.)

• Si una matriz se somete a operaciones elementales su rango no varía. Una **operación elemental** consiste en la sustitución de una fila por ella misma más la suma de otras filas multiplicadas por números.

• Para hallar el rango de una matriz conviene hacer en ella operaciones elementales, buscando obtener ceros en alguna de las filas. Si se obtiene una fila de ceros, o dos filas iguales, o dos filas proporcionales, se suprime la fila nula o una de las dos proporcionales. Finalizado el proceso, el número de filas no nulas que queden en la matriz es el correspondiente a su rango.

Operaciones elementales.

Las **operaciones elementales** por reglón o fila son:

i. Multiplicar (o dividir) una fila por "c", un número diferente de cero ($R_i \longrightarrow c*R_i$)

ii. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila ($R_j \longrightarrow kR_i+R_j$)

iii. Intercambiar dos filas (R_{ij})

La idea es escalonar la matriz mediante las operaciones antes mencionadas y formar una matriz triangular superior.

Determinación de matriz inversa usando operaciones elementales.

Procedimiento

Paso 1: Se escribe la matriz ampliada (A | I), donde A es la matriz a la que le calcularemos su inversa.

Paso 2: Se utiliza la reducción por reglones para poner la matriz A en su forma escalonada reducida por filas.

Paso 3: Se decide si A es invertible.

a. Si la forma escalonada reducida por filas de A es la matriz identidad, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical. (I | A^{-1})

b. Si la reducción de A conduce a una fila de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Ejercicios: Determine la inversa de las siguientes matrices, si existe, usando operaciones elementales

1. $$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de cálculo de la inversa de una matriz de orden 2x2

Sea A una matriz de 2x2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces:

i. A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$

ii. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inversa para matrices de n*x*n (n>2)
Menor

Definición: Sea A una matriz n*x*n y sea M_{ij} la matriz de (n-1)x(n-1) que se obtiene de A eliminando la fila i y la comumna j. M_{ij} se llama **el menor** ij de A.

Ejemplos:

1. Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{12} M_{31}.

2. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{32} M_{24}.

Cofactor

Definición: Sea A una matriz de nxn- El cofactor ij de A, denotado por Aij, está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

Esto es el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por (-1)$^{i+j}$. Observe que:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si\ i+j\ es\ par \\ -1 & si\ i+j\ es\ impar \end{cases}$$

Ejemplo: del último ejemplo calcule los cofactores A_{32} y A_{24}.

Adjunta y cálculo de inversa usando la adjunta.

Sea A una matriz de nxn y sea B, la matriz de sus cofactores. Entonces, la adjunta de A, escrito (adj A), es la traspuesta de la matriz de los cofactores

$$adj\ A = B^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n1} \\ & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: Sea A una matriz de nxn. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

Ejercicios: Calcule la inversa, si existe, usando la adjunta.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ecuaciones matriciales (uso de matriz inversa)

Si se tiene la ecuación:

$$AX = B \qquad \cdot A^{-1}{}_{izq}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calcule X

Ejercicios:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz X que verifica $AX + B = C$

2. Sean las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calcule la matriz P que verifica $BP - A = C^t$

b. Determine la dimensión de M para que pueda efectuarse la multiplicación A*M*C

Ejercicios:

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calcule, si existe la matriz inversa de B.

b. Si $AB = BA$ y $A + A^t = 3I_2$ calcule x e y.

4. De una matriz A se sabe que su segunda fila es (-1 2), y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Halle los restantes elementos sabiendo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando matriz inversa

5. Resuelva el sistema usando matriz inversa: (AX=B)

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$$

$$x_2 - x_3 = -4$$

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7$$

Resolución de sistemas de ecuaciones Procedimiento de eliminación de Gauss para sistemas de 3x3

El procedimiento de eliminación de Gauss para sistemas de 3x3 intenta transformar la matriz ampliada (AlB), usando operaciones fila para llegar a la matriz (IlS), donde S es la solución del sistema:

AX=B, donde X=S.

El rango de una matriz (rango) es el número de filas distintas de cero que tiene, por lo que:

El sistema tiene:

- **Solución única** si: el rango(I)=rango(IlS)=rango(A)
- **Infinitas soluciones** si: el rango(I)=rango(IlS)<rango(A)
- **No tiene solución** si: el rango(I)<rango(IlS)

Eliminación de Gauss Jordan
Resolución de sistemas de ecuaciones de m ecuaciones y n incógnitas

Este método es para determinar todas las soluciones (si existen) de un sistema de m ecuaciones y n incógnitas, los cuales pueden tener solución única, infinitas soluciones o no tener solución.

Ejemplo: Resuelva los siguientes sistemas.

1. $$\left.\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 9 \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 4 \end{array}\right|$$

2. $$\left.\begin{array}{lllll} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 4 \end{array}\right|$$

Ejemplo:
Sistemas infinitas soluciones y sin solución:

Resuelva usando Gauss-jordan

1.
$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 & = & 30 \end{array}\right|$$

2.
$$\left.\begin{array}{rcr} +2x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 & = & 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 & = & 10 \end{array}\right|$$

Ejercicios: Resuelva usando eliminación de Gauss para sistemas de 3x3

1. $$\left.\begin{array}{cccc} x & +y & +z & =6 \\ 2x & -y & +3z & =4 \\ 4x & +5y & -10z & =13 \end{array}\right| \qquad R=(2,3,1)$$

2. $$\left.\begin{array}{cccc} x & +y & +z & =20 \\ 2x & -3y & +z & =-5 \\ 6x & -4y & +4z & =30 \end{array}\right| \qquad \text{infinitas soluciones}$$

3. $$\left.\begin{array}{cccc} -2x & +y & +3z & =12 \\ x & +2y & +5z & =10 \\ 6x & -3y & -9z & =24 \end{array}\right| \qquad \text{no tiene solución}$$

4. $$\left.\begin{array}{rrrr} x & +y & +z & =3 \\ & 2y & +z & =2 \\ & y & +2z & =2 \end{array}\right|$$

5. $$\left.\begin{array}{rrrr} x & +3y & +3z & =2 \\ -2x & -6y & -2z & =4 \\ & y & +z & =6 \end{array}\right|$$

6. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$x - y - z = -2$$

$$2x + 3y - z = 2$$

$$4x + y - 3z = -2$$

a. Clasifique y resuelva el sistema.

b. Escriba la matriz de los coeficientes del sistema y, si es posible calcule su matriz inversa.

Resolver sistemas de ecuaciones.

7. Determine los valores de m para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{cccc} mx & +y & +z & =m \\ x & +my & +z & =m^2 \\ x & +y & +mz & =m^3 \end{array}\right|$$

a) Tenga solución única

b) Tenga infinitas soluciones

c) No tenga solución

Método de Cramer : resolver sistemas de ecuaciones, con solución única, usando determinantes

Asimismo, los sistemas de ecuaciones pueden resolverse por vía de los determinantes, a saber:

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{nn}x_n & =b_n \end{array}\right|$$

Se construye un determinante, |A|, utilizando estos coeficientes, y siendo $|A_k|$ el determinante que se obtiene al eliminar la columna k y sustituirla por la columna de las constantes b_1, b_2,…b_n. Si $|A|\neq 0$ las ecuaciones son consistentes y es posible encontrar una solución. Ésta está dada por:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|},\ k = 1,2,\ldots,n$$

Ejemplo

Sea:

$$\left.\begin{array}{llll} ax & +by & +cz & =j \\ dx & +ey & +fz & =k \\ gx & +hy & +iz & =l \end{array}\right|$$

Las incógnitas x, y, z pueden encontrarse según:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Ejercicios

Resuelva los siguientes sistemas según Cramer:

1. $$\left.\begin{array}{rrrr} 2x & +y & -3z & =-1 \\ x & -3y & -2z & =-12 \\ 3x & -2y & -z & =-5 \end{array}\right|$$

2. $$\left.\begin{array}{rrrr} 2x & +4y & +3z & =3 \\ 10x & -8y & -9z & =0 \\ 4x & +4y & -3z & =2 \end{array}\right|$$

3. $$\left.\begin{array}{rrrr} 4x & -y & +5z & =-6 \\ 3x & +3y & -4z & =30 \\ 6x & +2y & -3z & =33 \end{array}\right|$$