Números Complejos y Polinomios

Números complejos

Se sabe que si el discriminante e una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación no tiene solución real.

Por ejemplo

$x^2+4=0$ no tiene solución real. Si se intenta resolver esta ecuación, se obtiene $x^2=-4$, por lo tanto $x=\pm\sqrt{-4}$. Pero esto es imposible, puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo.

Para hacer posibles que todas las ecuaciones cuadráticas tengan solución, los matemáticos inventaron un sistema de números desarrollado, llamado sistema de números complejos. Primero definieron el número $i^2=-1$, esto significa $i=\sqrt{-1}$.

Por esta razón, a $\sqrt{-1}$ se le llama i (de imaginaria), es decir que:

Por lo que: $i = \sqrt{-1}$

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2, \quad etc$$

Un número complejo es una expresión de la forma:

$$z = a + bi$$

Donde a y b son números reales.

a=parte real del complejo.

b= parte imaginaria del complejo.

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Ejemplo: determine los valores de x e y tal que $z_1 = z_2$ si

$$z_1 = 2x + (3y - 1)i$$

$$z_2 = 8 + (y + 5)i$$

Operaciones de números complejos

Definición:

Suma

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Resta

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Multiplicación

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ejercicios

Considere: $z_1 = 2 - 3i \qquad z_2 = 5 + 7i$

$z_3 = 1 - i \qquad z_4 = -3i$

Calcule:

$a. \quad 3z_1 + 2z_2 =$

$b. \quad 5z_3 - 2z_4 =$

$c. \quad z_1 \cdot z_2 - z_3 \cdot z_4 =$

División de números complejos

Para simplificar el cuociente $\dfrac{a+bi}{c+di}$, se multiplica el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador

Obs: Sea $z = a + bi$ entonces su conjugado es: $\bar{z} = a - bi$

Ejercicios: Calcule

$$a.\ \frac{3+5i}{1-2i}$$

$$b.\ \frac{7+3i}{4i-3}$$

Representación de un número complejo

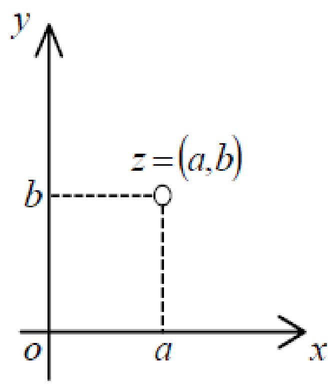
Hay dos formas de representar un numero complejo:

Forma canónica

(a,b) o $a+bi$

Re(z)=a

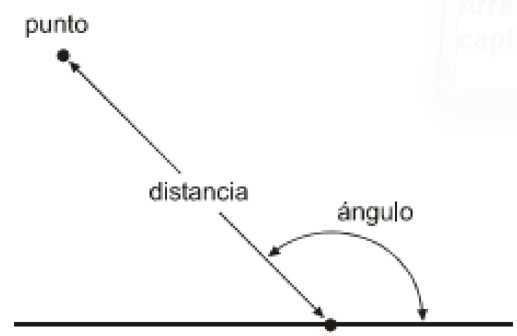
Im(z)=b



Forma polar

$$z=|z|(\cos\theta+isen\theta)=\rho cis\theta,$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right),|z|=\rho=\sqrt{a^2+b^2}$$



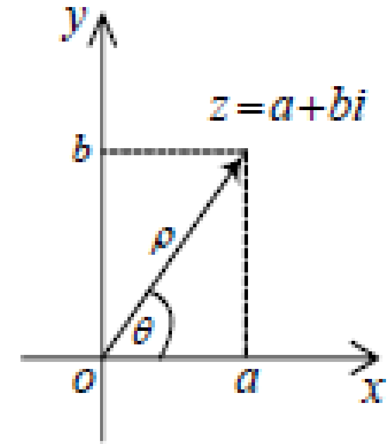
Forma trigonométrica (observación)

El ángulo θ se llama "argumento de z" y su valor varía entre 0 y 2π.

También de la figura se obtiene que:

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

la que nos ayuda a calcular el argumento θ.



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

θ ∈ II tan -	θ ∈ I tan +
θ ∈ III tan +	θ ∈ IV tan -

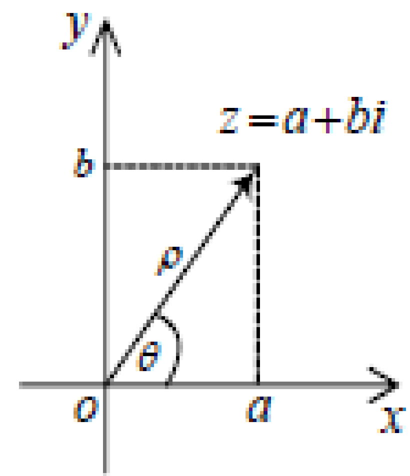
Ejercicios:

Hallar la forma trigonométrica de los siguientes complejos:

1. $\sqrt{3}+i$
2. $-\sqrt{2}+i$
3. -5
4. $3i$
5. $17i$
6. -13
7. $-2i$
8. 4
9. $3-4i$
10. $-1-\sqrt{3}\,i$

Multiplicación y cuociente

Dados $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$



$z_1 = \rho_1 cis\theta_1$ y $z_2 = \rho_2 cis\theta_2$, entonces

1) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} cis(\theta_1 - \theta_2)$

Ejercicios:

1. $\left(3cis\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(2cis\frac{\pi}{2}\right) =$

2. $\dfrac{\left(3cis\frac{5\pi}{6}\right)}{\left(6cis\frac{\pi}{6}\right)}$

3. $\left(7cis\,\dfrac{5\pi}{3}\right)\cdot\left(5cis\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

4. $\dfrac{\left(2cis\,\dfrac{\pi}{4}\right)}{\left(6cis\,\dfrac{2\pi}{3}\right)}$

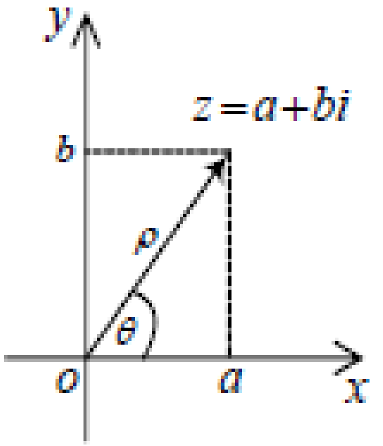
Potenciación

Fórmula de Moivre

Dado

$$z = \rho\, cis\theta \ \ , \text{ entonces}$$

$$z^n = \rho^n \left[\cos(n\theta) + i\, sen(n\theta) \right]$$



Ejemplo:

Calcule

$$(1+i)^{28} =$$

Ejercicios: Calcular

1. $\left(4cis\dfrac{3\pi}{2}\right)^3$
2. $(2i)^{10}$
3. $\left(-4+4\sqrt{3}\right)^9$
4. $\left(-3-2i\right)^6$
5. $\left(-2+3i\right)^5$

Radicación

Dado

$$z = \rho \, cis\theta \ , \ \text{entonces}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right],\ k = 0,1,2\ldots(n-1)$$

$$Ejemplo:$$

$$Calcular \quad \sqrt{-1}$$

Ejercicios:

Hallar

1. $\sqrt{(46-14\sqrt{3}\,i)}$
2. $\sqrt[3]{-8i}$
3. $\sqrt[5]{1}$
4. $\sqrt[5]{-32}$
5. $\sqrt{i}$
6. $\sqrt{(1+4\sqrt{3}\,i)}$

Polinomios y ecuaciones algebraicas

Def: Sea lK un cuerpo, se llama <u>polinomio sobre K en una indeterminada x</u> a una expresión formal:

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}$$

$$donde \quad a_i \in IK \quad \forall i \in IN_0 \;\; y \;\; \exists n \in IN_0$$

$$tal \quad que \quad a_i = 0 \;\; \forall i \geq n$$

Por ejemplo son polinomios sobre IR, las expresiones:

$$q(x) = 6 + 5x^4 \quad \text{y} \quad p(x) = 1 + x + \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Los elementos $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_m, \ldots\ldots$

reciben el nombre de coeficientes de p(x). El elemento a_m se dice que es el coeficiente de un índice m.

Si $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots\ldots + 0x^m + \ldots.$

entonces p(x) recibe el nombre de polinomio nulo

Si $p(x) = a \quad a \in IK$

recibe el nombre de polinomio constante

Polinomios. Igualdad y Grado.

Definición: Sean

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots + b_n x^n$$

Polinomios con coeficientes en lK. Entonces

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i \in IN_0$$

Además se dice <u>n es el grado</u> del polinomio p(x), y es el exponente más alto del polinomio tal que $a_n \neq 0$.

Notación: grado de p(x)= $\partial(p(x))$

Ejemplos:

1. Determine el grado de los siguientes polinomios

$$p(x) = 3x^2 + 5x - 1 \Rightarrow \partial(p(x)) =$$

$$q(x) = x^5 - \sqrt{5} \Rightarrow \partial(q(x)) =$$

$$r(x) = \pi \Rightarrow \partial(r(x)) =$$

2. Determine los valores de a, b y c tal que $p(x)=q(x)$.

$$p(x) = ax^2 + 5x - (c+2)$$

$$q(x) = (3a-2)x^2 + (2b+3c)x$$

Suma y Producto.

Definición: Sean

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n$$

Polinomios con coeficientes en lK. Entonces

i)

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_k x^k + ...$$

$$donde\ \ c_k = a_k + b_k$$

ii)

$$p(x) \cdot q(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_k x^k + ...$$

Ejemplo: Sean los polinomios $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad y \quad q(x) = 4x^2 - 1$

Súmelos y multiplíquelos

Raíz de un polinomio

Definición: Sea p(x) en IK, el elemento $\alpha \in IK$ recibe el nombre de raíz de p(x) si $p(\alpha) = 0$

Ejercicios:

1. Encontrar los valores de k para que x=3 sea raíz de:

   $p(x) = x^4 - kx + 3 - k$

2. Si $p(x) = ax^4 - 5x^3 + (a+3)x^2 - 20$; calcule el valor de a si se sabe que 2 es una raíz.

3. Sea $p(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + ax + b; \quad a, b \in Q$

   determine a y b tal que 1 y -1 sean raíces del polinomio p(x).

División de Polinomios algoritmo de la división

1. Sean $p(x)$ y $t(x)$ en IK(x), K cuerpo, el algoritmo de la división dice que existen únicos $q(x)$ y $r(x)$ en IK(x) tal que

$$p(x):t(x)=q(x) \Rightarrow p(x)=q(x)\cdot t(x)+r(x); \partial r(x)<\partial t(x)$$

$$r(x)$$

Donde: $q(x)$es el cuociente y $r(x)$ es el resto

Obs: se puede dividir por el polinomio siempre y cuando el grado de $p(x)$ sea mayor o igual que el grado de $t(x)$, donde el grado está dado por el exponente de la variable considerada.

Ejemplo:

Divida

$$
\begin{array}{l}
2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1 : x - 2 = 2x^3 + \ldots \\
\underline{-2x^4 + 4x^3} \\
\qquad\quad 7x^3 - x^2
\end{array}
$$

Ejercicios: Divida.

1. $(y^5 - 3y^4 + 2y^3 - y + 1) : (y^2 - 2y + 2) =$
2. $(-x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 2) : (x^2 - x + 3) =$
3. $(-2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 3) : (x + 5) =$

Teorema del resto

2. $p(x) = (x-\alpha)\cdot q(x) + c$ En esta última igualdad, al evaluar en $x = \alpha$ se tiene:

$$p(\alpha) = (\alpha-\alpha)\cdot q(\alpha) + c$$

$$p(\alpha) = c$$

Ejemplo:

Encuentre un polinomio mónico (coeficiente de la máxima potencia de x es 1) de grado 3 tal que:

- Al dividirlo por $(x\text{-}2)$, se obtiene resto 3.
- Al dividirlo por $(x\text{-}1)$, se obtiene resto 2.
- Al dividirlo por $(x+1)$, se obtiene resto 4

División Sintética

Sea $$p(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + \ldots.. + a_1 x + a_0$$

Dividido por $$t(x) = x - a$$

a_n	a_{n-1}	....	a_1	a_0	
	$a_n \cdot a$				a
a_n	$a_{n-1} + a_n \cdot a$			$resto$	

$$q(x) = a_n x^{n-1} + (a_{n-1} + a_n \cdot a) x^{n-2} + \ldots.$$

Ejemplo: Divida $$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4 \quad por \quad t(x) = x - 1$$

Ejercicios

Divida los siguientes polinomios usando división sintética:

1. $p(x) = 4x^3 + 5x^2 - x + 10 \quad y \quad t(x) = x + 3$

2. $p(x) = x^5 - 30x^3 + 26x^2 - x - 20 \quad y \quad t(x) = x - 5$

3. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \quad y \quad g(x) = x - 2$

4. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2 \quad y \quad g(x) = x + 1$

5. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 32 \quad y \quad g(x) = x + 4$

6. $f(x) = 32x^{10} - 33x^5 + 1 \quad y \quad g(x) = x - 1$

Ejercicios

1. Hallar la relación entre a y b para que :

   $$p(x) = 2x^4 - 7x^3 + ax + b$$

   sea divisible por (x-3) y por (x-1).

2. Hallar k de modo que el polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4kx + 4$

   tenga una raíz x=2 y luego encuentre las otras dos raíces.

3. Dada la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + a = 0, a, b \in IR$

   determine a y b de modo que $x=2+i$ sea una raíz y luego resuelva la ecuación.

Ecuaciones
Raíces racionales

Si la ecuación: $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes enteros tiene una raíz racional $\alpha = \dfrac{p}{q}$

Donde :

p es un divisor de a_0

q es un divisor de a_n

Obs. El teorema de los ceros racionales: provee una herramienta para hacer un listado de todos los posibles ceros racionales de un polinomio con coef. enteros. No necesariamente todos los números en el listado serán ceros del polinomio, pero todos los ceros racionales del polinomio estarán en el listado.

Ejercicios: Determine las posibles raíces de los siguientes polinomios y luego determine cual(es) de ellas son raíces.

1. $p(x)=6x^4-7x^3-4x^2+7x-2$

2. $p(x)=4x^3-5x^2-7x+2$

3. $p(x)=2x^3-7x^2+4x+3$

4. $p(x)=x^4-6x^3+14x^2-14x+5$

La regla de los signos de Descartes.

Teorema: Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

- El número de ceros reales positivos de $p(x)$ es igual al número de variaciones de signos de $p(x)$ o menor que eso por un número entero positivo par.

- El número de ceros reales negativos de $p(x)$ es igual al número de variaciones de signos de $p(-x)$ o menor que eso por un número entero positivo par.

Ejemplos: aplique la regla de signos de descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos de los siguientes polinomios.

1. $p(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$

2. $p(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$

Ejercicios:

1. Encontrar los valores de k para que al dividir
   $x^4 - kx + 3 - k \quad \text{por} \quad x - 3$ resulte como resto 4.

2. Si $p(x) = ax^4 - 5x^3 + (a+3)x^2 - 20$ calcule el valor de a si se sabe que 2 es una raíz. Determine las raíces restantes.

3. Determine las raíces de:
   $$p(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + ax + b; \qquad a, b \in Q$$
   si se sabe que una de las raíces es 1+i.

4. Determine todas las raíces del polinomio
   $$p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$